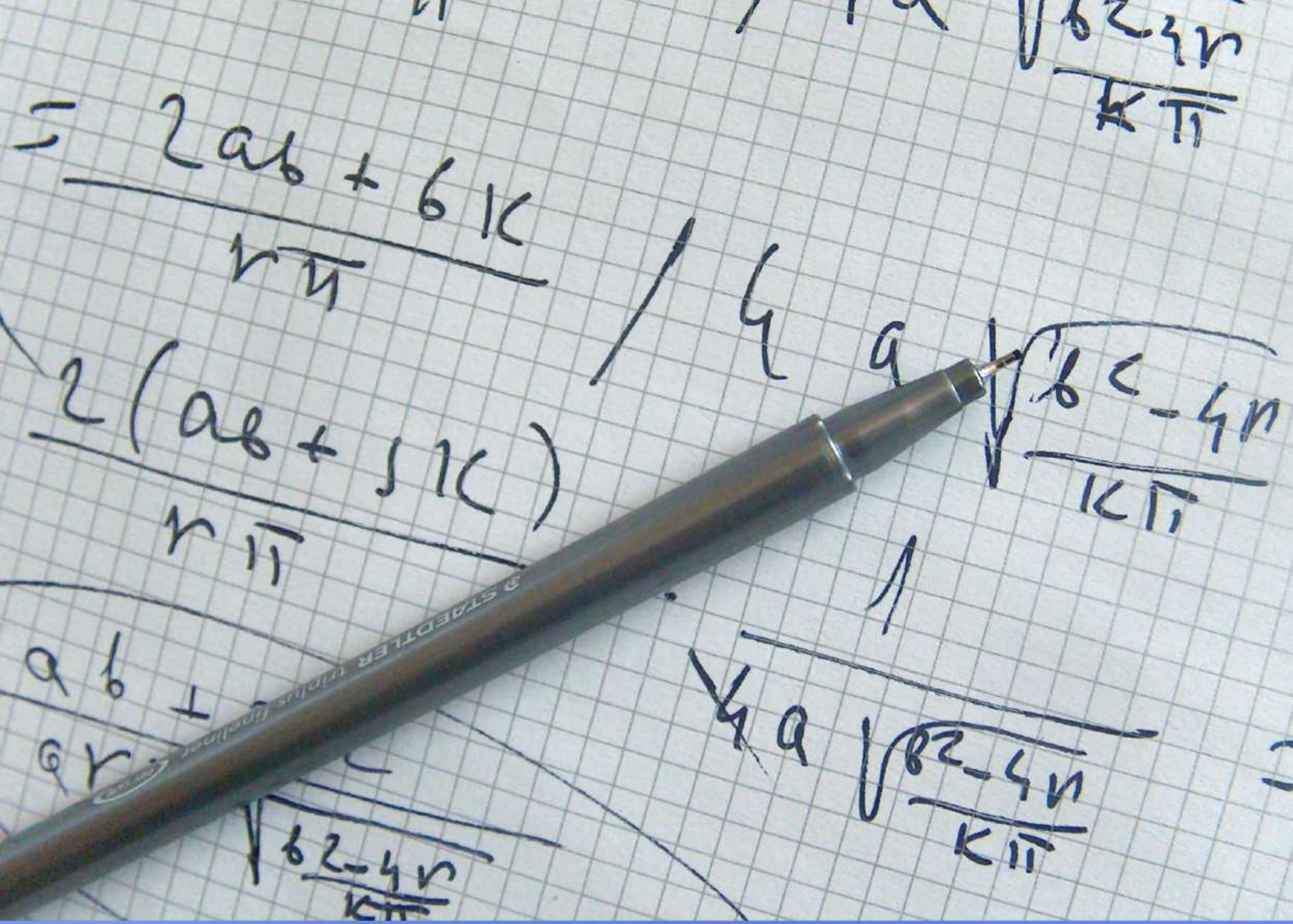


Getallenstelsels

Brechtje Poppen en Mike van Eck

J.G. Elderkamp

6 vwo wiskunde

11 februari 2021

Voorwoord

Voor u ligt ons verslag over getallenstelsels. Toen wij op zoek gingen naar een onderwerp voor ons profielwerkstuk wisten we eigenlijk gelijk al dat we het over een wiskundig onderwerp wilden doen. Het was moeilijk om een onderwerp te kiezen omdat wiskunde enorm veel toepassingen heeft, die vaak erg interessant zijn. Daarom kozen we ervoor om een onderwerp te kiezen waarin niet een toepassing van de wiskunde wordt onderzocht, maar juist de werking van de wiskunde, namelijk, getallenstelsels.

We hebben beiden erg veel geleerd van het schrijven van dit verslag. Er waren soms momenten dat we vastliepen op een onderdeel als een bewijs, maar omdat we het niet opgaven zijn we er uiteindelijk toch uitgekomen. Door dit soort momenten hebben we ook veel plezier gehad bij het schrijven van het verslag.

Als laatste willen we nog onze begeleider, meneer Elderkamp bedanken. Hij was al gelijk enthousiast over ons onderwerp, waardoor wij met vertrouwen ons onderzoek konden beginnen. Ook heeft hij ons nuttige inzichten gegeven wanneer we vastliepen.

Brechtje Poppen en Mike van Eck

6 februari 2022

Samenvatting

In dit verslag onderzoeken we wat ons optimale getallenstelsel is. Hiervoor hebben we eerst de basis van de wiskunde beschreven. Dit was nodig omdat wij in andere getallenstelsels zijn gaan werken en alle wiskundige regels moeten wel in elk getallenstelsel gelden. We hebben hierbij belangrijke axioma's beschreven en begrippen uitgelegd. Ook hebben we verschillende symbolen en operatoren gedefinieerd.

In het eerste hoofdstuk, wat ook onze eerste deelvraag is, hebben we onderzoek gedaan naar de verschillende getallenstelsels die in de geschiedenis van de mensheid zijn gebruikt. Hier is duidelijk een verschil te zien tussen additieve, hybride en positionele getallenstelsels. Ook is gekeken naar het ontstaan van getallenstelsels, omdat hieruit blijkt wat het belang van getallenstelsels is in onze samenleving. Vervolgens hebben we in hoofdstuk 2 gekeken naar de werking van deze getallenstelsels. Hierbij zijn de verschillende soorten getallenstelsels beschreven. Voor twee van deze stelsels zijn rekenregels opgesteld en bewezen. Deze rekenregels konden in de latere hoofdstukken toegepast worden. In hoofdstuk 3 hebben we gekeken naar de problemen van de getallenstelsels. Zo hebben sommige getallenstelsels een te groot grondtal en hebben andere getallenstelsels te ingewikkelde notaties. Dit is relevant omdat we hierdoor een inzicht kregen van elementen die er voor zorgen dat een stelsel juist wel goed werkt. In hoofdstuk 4 hebben we onderzoek gedaan naar ons ideale getallenstelsel. Dit was ook onze hoofdvraag. We hebben de informatie die we in hoofdstuk één, twee en drie hebben verzameld, gebruikt om tot een ideaal getallenstelsel en grondtal te komen. In dit hoofdstuk werd dus de conclusie van dit verslag gegeven. We hebben uiteindelijk gekozen voor een 12-tallig positioneel stelsel. Ook hebben we de 2 nieuwe getallen ontworpen. In het laatste hoofdstuk hebben we gekeken hoe de wiskunde eruit zou zijn als er een 12-tallig positioneel stelsel gebruikt wordt. Zo hebben we bijvoorbeeld de nieuwe waardes van e en pi berekend.

Inhoudsopgave

Inleiding

Er worden op dit moment allerlei verschillende getallenstelsels gebruikt. Zo worden voor klokken een twaalftallig en een zestigtallig stelsel gebruikt en voor computers een binair stelsel en zestientallig stelsel. Het blijkt dat voor verschillende doeleinden verschillende getallenstelsels praktisch zijn. In de wiskunde wordt vaak een decimaal stelsel gebruikt. Het is echter de vraag of dit wel het meest geschikte stelsel is om te gebruiken. Dat wordt in dit verslag onderzocht. Onze hoofdvraag is dan ook ‘Hoe ziet ons optimale getallenstelsel eruit?’. We hebben hierbij specifiek gekeken naar ons ideale stelsel, niet het ideale stelsel. Dit hebben we gedaan omdat wij misschien bepaalde elementen in een stelsel belangrijker vinden dan anderen ze vinden. Om duidelijk te maken wat voor ons het ideale stelsel is hebben we eerst gedefinieerd wat ideaal voor ons betekent.

Wiskunde wordt op veel gebieden toegepast, waaronder de wetenschap. Om berekeningen zo soepel mogelijk te laten verlopen, is het cruciaal om een goed werkende wiskunde te hebben. Deze wiskunde hangt compleet af van het gebruikte getallenstelsel. Het hoeft helemaal niet vanzelfsprekend te zijn dat er een decimaal stelsel gebruikt wordt, want misschien is er wel een stelsel waarin veel efficiënter gerekend kan worden. Daarom is het belang van dit onderzoek erg groot.

Om de hoofdvraag goed ondersteund te kunnen beantwoorden worden meerdere deelvragen beantwoord. De eerste hiervan is ‘Hoe ontwikkelden getallenstelsels zich in onze geschiedenis?’. Door te onderzoeken welke getallenstelsels er gebruikt werden en waarom deze gebruikt werden krijgen we een redelijk inzicht achter de motivaties voor het gebruiken van verschillende getallenstelsels.

Daarna kijken we naar de algemene werking van getallenstelsels met de vraag ‘Hoe werken de verschillende getallenstelsels?’. Dit is een essentieel onderdeel om de hoofdvraag te beantwoorden omdat het nodig is om te weten welke stelsels er zijn, en hoe deze werken, om te bepalen welk stelsel ideaal is. In dit hoofdstuk zal worden gekeken welke stelsels er allemaal zijn en hoe er in deze stelsels gerekend kan worden.

Ook is het relevant om te weten welke problemen er bij verschillende getallenstelsels voorkomen. Dit wordt onderzocht met de deelvraag ‘Welke problemen komen er voor bij de getallenstelsels?’. Zo kunnen we bepalen welke eigenschappen een ideaal stelsel in ieder geval niet moet hebben. Voor dit hoofdstuk wordt de informatie uit de vorige hoofdstukken gebruikt

Met deze deelvragen hebben we genoeg informatie om de hoofdvraag te beantwoorden, wat in het vierde hoofdstuk gedaan zal worden. De deelvraag bij dit hoofdstuk is dan ook gelijk aan de hoofdvraag, namelijk ‘Hoe ziet ons optimale getallenstelsel eruit?’. Ook zal er in dit hoofdstuk, als dat nodig is, een nieuw stelsel gecreëerd worden.

Ook al is de hoofdvraag dan al beantwoord, er is nog geen aandacht gegeven aan een belangrijk onderdeel van dit onderzoek, namelijk, de invloed van het nieuwe stelsel op de hedendaagse wiskunde. Als blijkt dat een ander stelsel dan het huidige decimale stelsel efficiënter is, dan zal dit een grote invloed hebben op de wiskunde die wij kennen. Dit zal in het laatste hoofdstuk besproken worden met de deelvraag ‘Wat is de invloed van ons nieuwe getallenstelsel op de huidige wiskunde?’.

Basis van de wiskunde

De wiskunde die in dit verslag gebruikt wordt is gebaseerd op een aantal regels die zijn afgesproken om wiskunde begrijpbaar voor iedereen te maken. Deze regels worden toegelicht zodat de rest van het verslag begrepen kan worden. We werken in dit verslag in verschillende getallenstelsels en met dit pre-hoofdstuk laten we zien wat alles betekent en dat alles wat hier wordt benoemd geldt in elk getallenstelsel.

0.1 Wiskundige symbolen

De wiskunde bevat een groot aantal symbolen. Deze symbolen zijn nodig om berekeningen uit te kunnen voeren. Er zijn allemaal regels voor deze symbolen en sommige zullen ook gedefinieerd worden.

'=': als $x = y$, dan is x gelijk aan y. '=' betekent 'is gelijk aan'.
$4 = 4$

'≠': als $x \neq y$, dan is x niet gelijk aan y. '≠' betekent 'is niet gelijk aan'.
$5 \neq 4$

'≈': als $x \approx y$, dan is x ongeveer gelijk aan y. '≈' betekent 'is ongeveer gelijk aan'.
$2{,}999 \approx 3$

'+': symbool van optelling. De waardes voor en na het teken worden bij elkaar opgeteld.
$3 + 2 = 5$

'-' symbool van aftrekking. De waarde na het teken wordt van de waarde voor het teken afgehaald.
$5 - 2 = 3$

'x' of ' · ': symbool van vermenigvuldiging. $x \cdot y$ betekent dat je y keer x bij zichzelf optelt.
$3 \cdot 4 = 3 + 3 + 3 +3 =12$

'/' of ':': symbool van deling. x / y is het getal waar je, na vermenigvuldiging met y, x eruit terugkrijgt.
$12 / 3 = 4$, want $3 \cdot 4 = 12$

'²' symbool van kwadrateren. Als er x^2 staat, wordt $x \cdot x$ bedoelt. Als er in plaats van een 2 een ander getal a staat, wordt het grondtal a keer met zichzelf vermenigvuldigd.
$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

'√': symbool van de wortel. $\sqrt{x}$ is het positieve getal, waarvan het kwadraat hiervan gelijk is aan x.
$\sqrt{9} = 3$, want $3^2 = 9$

'⇒': als $A \Rightarrow B$, dan volgt B uit A. Als A waar is, dan is B ook waar.

$x - 3 = 5 \Rightarrow x = 8$

'±': optelling of aftrekking. Het getal kan zowel positief als negatief zijn.
$x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

'( )' : haakjes. Berekeningen die gedaan moeten worden in de haakjes, krijgen voorrang boven alles.
$2 \cdot 3 + 5 = 11, \quad 2 \cdot (3 + 5) = 16$

'>': symbool wat 'groter dan' betekent. $x > y$ betekent x is groter dan y.
$4 > 3$

'<': symbool wat 'kleiner dan' betekent. $x < y$ betekent x is kleiner dan y.
$3 < 4$

'≥': symbool wat 'groter dan of gelijk aan' betekent. $x \geq y$ betekent x is groter dan of gelijk aan y.
$3 \geq 3$

'≤': symbool wat 'kleiner dan of gelijk aan' betekent. $x \leq y$ betekent x is kleiner dan of gelijk aan y.
$3 \leq 3$

'!': symbool wat uitgesproken wordt als faculteit. n! is gelijk aan het product van de getallen van 1 t/m n.
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

'∈': betekent 'element van'. het symbool voor het teken is een element van de verzameling van het symbool na het teken.
$4 \in \mathbb{N}$

'ℕ': de verzameling van alle natuurlijke getallen, dus alle hele positieve getallen, behalve 0.
$4 \in \mathbb{N}$

'ℤ': de verzameling van alle natuurlijke getallen en hele negatieve getallen. Ook wel de gehele getallen genoemd.
$-4 \in \mathbb{Z}$

'ℚ': de verzameling van alle gehele getallen en alle eindige kommagetallen, dus alle getallen die als breuk te schrijven zijn. Ook wel de rationale getallen genoemd.
$2{,}75 \in \mathbb{Q}$

'ℝ': de verzameling van alle irrationale getallen en alle getallen die niet als breuk te schrijven zijn. Dus niet-eindige kommagetallen. Ook wel de reële getallen genoemd.
$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

'ℂ': de verzameling van alle reële getallen en alle complexe getallen, dus alle getallen waar een i in voorkomt.
$-7i \in \mathbb{C}$

'$\wedge$': symbool van conjunctie. Als er staat A $\wedge$ B, dan moeten zowel A als B waar zijn voordat de uitspraak klopt.
$(3 > n) \wedge (4 > n)$ is een kloppende uitspraak als $n < 3$.

'$\vee$': symbool van disjunctie. Als er staat A $\vee$ B, dan moet of A of B waar zijn voordat de uitspraak klopt.
$(n \leq 2) \vee (n \geq 4)$ is een kloppende uitspraak voor $n \neq 3$ en $n \in \mathbb{N}$.

'∞': dit symbool stelt het oneindige voor. Dit symbool is een fictief getal groter dan alle reële getallen.

'π': De verhouding tussen de omtrek van een cirkel en de diameter van diezelfde cirkel. In het getallenstelsel dat in Nederland gebruikt wordt is dit afgerond gelijk aan 3,14.

' …': deze drie puntjes worden gebruikt om 'enzovoort' of ' tot en met' aan te geven. $n + 1, n + 2, \ldots, n + n$ betekent dat alle waardes tussen $n + 2$ en $n + n$ ook in de rij horen.
$1! + 2! + 3! + \ldots$ betekent de som van 1! tot en met ∞!

'$\overline{}$' : symbool van herhaling. De cijfers onder dit symbool herhalen zichzelf.
$2,46\overline{378} = 2,46378378378378\ldots$

'$\sum_{x=a}^{b} y$': symbool van opsomming. Dit is de som van y van a t/m b.

$$\sum_{x=2}^{5} 3x = 3(2) + 3(3) + 3(4) + 3(5) = 6 + 9 + 12 + 15 = 42$$

'div': a div b betekent de geheeltallige deling van a door b. Er wordt dus gekeken hoe vaak b in a past.
7 div 2 = 3

'mod': a mod b betekent de rest van de geheeltallige deling van a door b. Er wordt dus gekeken hoeveel er overblijft wanneer a door b gedeeld wordt. a mod b is gelijk aan $a - b \cdot (a \text{ div } b)$.
7 mod 2 = 1 [0.1]

0.2 Begrippen

Sommige begrippen zijn nodig om figuren en structuren in de wiskunde een naam te geven. Hieronder een aantal belangrijke begrippen.

- Punt: een specifieke positie binnen een ruimte, zonder lengte, oppervlakte of volume. [0.2]
- Lijn: een eendimensionale structuur bestaande uit een continue aaneenschakeling van punten. De eindes van een lijn is een punt. [0.3]
- Halfrechte: een lijn die aan één kant begrensd is en aan de andere kant oneindig doorlopend is. [0.4]
- Een vlak is datgene wat alleen uit lengte en breedte bestaat. [0.5]
- Lijnstuk: een deel van een lijn dat door twee verschillende punten van die lijn begrensd wordt. [0.6]
- Afstand: de meetbare ruimte tussen twee niet samenvallende objecten. [0.7]
- Cirkel: een tweedimensionaal figuur dat wordt gevormd door alle punten die dezelfde afstand tot een bepaald punt hebben. [0.8]
- Bol: een driedimensionaal lichaam bestaande uit de punten die ten hoogst op een bepaalde afstand van een gegeven punt liggen. [0.9]
- Middelpunt: het punt dat tot alle punten op de omtrek van een cirkel of het boloppervlak dezelfde afstand hebben. [0.10]
- Straal: de afstand van een willekeurig punt op de rand van een cirkel of bol tot het middelpunt. [0.11]
- Hoek: een figuur in een vlak gevormd door twee halfrechten met een gemeenschappelijk beginpunt. [0.12]
- Snijdende lijnen: lijnen die niet overal dezelfde afstand tot elkaar hebben, maar wel in hetzelfde vlak liggen. [0.13]
- Kruisende lijnen: lijnen die niet overal dezelfde afstand tot elkaar hebben en ook niet in hetzelfde vlak liggen. [0.13]

0.3 Axioma's

De wiskunde bestaat uit axioma's. Deze axioma's (ook wel postulaten genoemd) zijn beweringen, maar deze beweringen zijn niet bewezen. Ze dienen als grondslag voor alle andere wiskundige bewijzen. Deze axioma's kunnen dus op geen enkele manier bewezen worden of uit andere axioma's afgeleid worden. [0.14] Axioma's zijn ook nodig om de wiskunde te snappen die in dit verslag behandeld worden. Hier zijn allemaal axioma's waar de wiskunde in dit verslag zich aan houdt:

0.3.1 Postulaten van euclides

1. Door twee *punten* kan altijd een rechte *lijn* gemaakt worden.
2. Elke rechte lijn kan eindeloos als rechte lijn uitgebreid worden.
3. Elk *lijnstuk* kan de *straal* zijn van een *cirkel* met een van de uiteinden van dat lijnstuk als *middelpunt*.
4. Alle rechte *hoeken* zijn *congruent*.
5. Als twee lijnen een derde lijn zo *snijden* dat de som van de binnenhoeken aan een kant. kleiner is dan twee rechte hoeken, dan moeten deze twee lijnen elkaar onvermijdelijk snijden als ze genoeg verlengd worden. [0.15]

0.3.2 Axioma's van Peano

Axioma's

1. 0 is een natuurlijk getal.
2. Voor alle natuurlijke getallen x geldt: x = x.
3. Voor alle natuurlijke getallen x en y geldt: als x = y dan y = x.
4. Voor alle natuurlijke getallen x, y en z geldt: als x = y en y = z, dan x = z.
5. Voor alle a en b geldt: als a een natuurlijk getal is en a = b, dan is b ook een natuurlijk getal.

In de volgende axioma's wordt S(x) beschreven. S(x) is de opvolger van x, dus als x = 3, dan is S(x) = 4.

6. Voor elk natuurlijk getal x geldt dat S(x) ook een natuurlijk getal is.
7. Voor elk natuurlijk getal x geldt, dat S(x) = 0 onwaar is.
8. Voor alle natuurlijke getallen x en y geldt: als S(x) = S(y), dan x = y.
9. Elke verzameling $\mathbb{N}$, waarvoor geldt dat $(0 \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathbb{N} \Rightarrow S(x) \in \mathbb{N})$, bevat alle natuurlijke getallen. [0.16]

0.3.3 Begrippen

Met deze axioma's kunnen operatoren bewezen worden. Hiervoor moeten eerst 4 begrippen worden uitgelegd.

Neutraal element

Het neutraal element is een element dat geen verandering teweeg brengt na bewerking met een ander element. Bij optellen is dit bijvoorbeeld 0, want $3 + 0 = 3$ en bij vermenigvuldigen is dit 1. [0.17]

Commutativiteit

Een operator * is commutatief als voor deze operatie geldt: $x * y = y * x$.

Optellen en vermenigvuldigen zijn commutatieve operatoren omdat bijvoorbeeld geldt dat $x + y = y + x$. Aftrekken en delen zijn geen commutatieve operatoren. [0.18]

Associativiteit

Een operator * is associatief als voor deze operator geldt: $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Optellen en vermenigvuldigen zijn ook associatieve operatoren, omdat bijvoorbeeld geldt dat $(x + y) + z = x + (y + z)$, maar aftrekken en delen zijn geen associatieve operatoren, want $(x - y) - z = x - y - z \neq x - y + z = x - (y - z)$. [0.19]

Distributiviteit

Een operator * is distributief als een operator zowel links-distributief als rechts-distributief is.

Een operator * is linksdistributief als geldt: $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$

Een operator * is rechtsdistributief als geldt: $(y + z) * x = (y * x) + (z * x)$

Vermenigvuldigen is een distributieve operator, maar optellen weer niet, want $x + (y + z) \neq (x + y) + (x + z)$. Optellen is dus niet linksdistributief, dus ook niet distributief. [0.20]

De commutativiteit, associativiteit en distributiviteit van optellen en vermenigvuldigen worden hieronder bewezen.

0.3.4 Optellen

Optellen is een operatie waarvoor geldt dat $x + 0 = x$ en $x + S(y) = S(x + y)$

Hieruit valt af te leiden dat $x + 1 = x + S(0) = S(0 + x) = S(x)$

Dit kan worden gebruikt voor $x + 2$, want $x + 2 = x + S(1) = S(x + 1) + S(S(x))$

Dit kan worden herhaald voor alle andere natuurlijke getallen.

Volledige inductie

0 is hier het neutraal element. Dit kan bewezen worden met volledige inductie. Volledige inductie is een bewijstechniek. Als $P(n)$ een uitspraak is over een eigenschap van het positieve gehele getal n. Dan is $P(n)$ geldig voor elk getal positief geheel n als aan deze twee eigenschappen wordt voldaan:

- $P(1)$ is geldig;
- Voor elk positief geheel getal k geldt: als $P(k)$ geldig is, dan is $P(k+1)$ geldig.

Hierboven werd al gezegd dat $x+1 = S(x)$, dus $k+1=S(k)$. Er kan nu dus worden gekeken of $P(S(x))$ geldig is om te bewijzen dat een operator commutatief is.

Neutraal element

Het neutraal element is 0, want $1 + 0 = S(0) + 0 = S(0 + 0) = S(0) = 1$ en $0 + S(x) = S(0 + x) = S(x)$.

Volgens volledige inductie is zo bewezen dat het neutraal element 0 is.

Commutativiteit

Optelling is commutatief als $x + y = y + x$.

Als $n = 1 = y$, krijg je $x + 1 = x + S(0) = S(x + 0) = S(x) = (0 + x) = S(0) + x = 1 + x$, dus voor $n = 1$ geldt dat optellen commutatief is.

$x + S(y) = S(x + y) = S(y + x) = S(y) + x$, dus voor $S(y)$ is optellen ook commutatief.

Dus volgens volledige inductie is optellen commutatief.

Associativiteit

Optelling is associatief als $(x + y) + z = x + (y + z)$.

Als $n = 1 = z$, dan krijg je $(x + y) + 1 = (x + y) + S(0) = S((x + y) + 0) = S(x + y) = S(x + (y + 0)) = x + S(y + 0) = x + (y + S(0)) = x + (y + 1)$. P(1) is geldig.

$(x + y) + S(z) = S((x + y) + z) = S(x + y + z) = S(x + (y + z)) = x + S(y + z) = x + (y + S(z))$

P(S(z)) is geldig, dus is optellen associatief volgens volledige inductie.

Distributiviteit

Optellen is distributief als optellen zowel links-distributief als rechts-distributief is.

Optellen is linksdistributief als geldt: $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$.

Optellen is rechtsdistributief als geldt: $(y + z) * x = (y * x) + (z * x)$.

Invullen van $n = 1 = z$ geeft:

$x + (y + 1) = x + S(y) = S(x + y) = x + y + 1 \neq x + x + y + 1$, dus optellen is niet links-distributief, dus ook niet distributief.

0.3.5 Vermenigvuldigen

Voor vermenigvuldigen geldt dat $x \cdot 0 = 0$ en dat $x \cdot S(y) = x + x \cdot y$.

$2 \cdot 3$ is dan uit te rekenen als $S(S(0)) \cdot S(S(S(0))) = S(S(0)) + S(S(0)) \cdot S(S(0)) = S(S(0)) + S(S(0)) + S(S(0)) \cdot S(0) = S(S(0)) + S(S(0)) + S(S(0)) + S(S(0)) \cdot 0 = S(S(0)) + S(S(0)) + S(S(0)) = S(S(S(S(S(S(0))))))$. $2 \cdot 3$ wordt hier dus eerst opgeschreven als $2 + 2 + 2$, en dan verder uitgerekend door op te tellen.

Neutraal element

Het neutraal element van vermenigvuldigen is 1. Het neutraal element kan weer aangetoond worden met behulp van volledige inductie, evenals de commutativiteit, associativiteit en distributiviteit. Vermenigvuldigingssommen kunnen ook zonder operatorteken worden geschreven, dus $x \cdot y$ kan ook worden geschreven als xy, wat in de rest van het werkstuk vaak zal gebeuren.

Als het neutraal element 1 is, dan is $1 \cdot x = x$.

Volledige inductie:

$1 \cdot 1 = 1 \cdot S(0) = 1 + 1 \cdot 0 = 1$

P(1) is geldig.

$1 \cdot S(x) = 1 + 1 \cdot x = 1 + x \cdot S(0) = 1 + x + x \cdot 0 = 1 + x = x + 1 = S(x)$.

P(S(k)) is geldig, dus 1 is het neutrale element bij vermenigvuldigen.

Commutativiteit

Vermenigvuldigen is commutatief als $xy = yx$.

$n = 1 = y$ geeft:

$x \cdot 1 = x \cdot S(0) = x + x \cdot 0 = x = 1 \cdot x$.

Stel $xy + yx$ geldt, dan

$x \cdot S(y) = x + xy = x + yx = (1 + y)x = S(y)x$. De stelling geldt voor P(1) en P(S(k)), dus vermenigvuldigen is commutatief.

Associativiteit

Vermenigvuldigen is associatief als $(xy)z = x(yz)$.

$n = 1 = z$ invullen geeft:

$(xy) \cdot 1 = xy$, want neutrale factor is gelijk aan 1.

$xy = x(y) = x(y \cdot 1)$, want neutrale factor is gelijk aan 1.

Dan voor alle waardes van z, S(z) invullen geeft:

$(xy)S(z) = (xy) + (xy)z = xy + x(yz) = x(y + yz) = x(y + S(z))$.

Volgens volledige inductie is vermenigvuldigen dus associatief.

Distributiviteit

Vermenigvuldigen is distributief als vermenigvuldigen zowel links-distributief als rechts-distributief is.

Vermenigvuldigen is linksdistributief als geldt: $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$.

Vermenigvuldigen is links-distributief als $x(y + z) = xy + yz$.

Invullen van $n = z =1$ geeft:

$x(y + 1) = xS(y) = x + xy = xy + x = xy + x \cdot 1$.

Invullen van S(z) in plaats van z geeft:

$x(y + S(z)) = xS(y + z) = x + x(y + z) = x + xy + xz = xy + x + xz = xy + x(z + 1) = xy + xS(z)$.

Vermenigvuldigen is rechts-distributief als geldt: $(y + z) * x = (y * x) + (z * x)$.

Vermenigvuldigen is rechts-distributief als $(y + z)x = yx + zx$.

Invullen van $n = z = 1$ geeft:

$(y + 1)x = S(y)x = xS(y) = x + xy = xy + x = xy + x \cdot 1$.

Invullen van S(z) in plaats van z geeft:

$(y + S(z))x = (S(y + z))x = xS(y + z) = x + x(y + z) = x + xy + xz = yx + x + zx = yx + (1 + z)x = yx + S(z)x$.

Vermenigvuldiging is volgens volledige inductie zowel links- als rechts-distributief, dus vermenigvuldigen is distributief.

0.4 Algemene inzichten

Dit zijn een aantal algemene inzichten waar vanuit wordt gegaan in dit verslag.

1. Dingen, gelijk aan hetzelfde, zijn ook aan elkaar gelijk (als a = c en b = c, dan b = c).
2. Als men bij gelijke dingen gelijke hoeveelheden toevoegt, zijn de eindtotalen gelijk (als a = b, dan a + c = b + c).
3. Als men van gelijke dingen gelijke hoeveelheden afneemt, zijn de resten gelijk (als a = b, dan a - c = b - c).
4. Als aan ongelijken gelijken worden toegevoegd, zijn de eind gehelen ongelijk (als a≠b, dan a + c ≠ b + c).
5. De dubbelen van hetzelfde zijn gelijk aan elkaar (2a = 2a).
6. De helften van hetzelfde zijn gelijk aan elkaar ($\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a$).
7. Dingen die op elkaar passen zijn gelijk.
8. Het geheel is groter dan het deel.
9. Twee rechten omvatten geen ruimte. [0.21]

0.5 Rekenvolgorde

De volgorde waarin berekeningen worden uitgevoerd, wordt de rekenvolgorde genoemd. De huidige rekenvolgorde is als volgt:

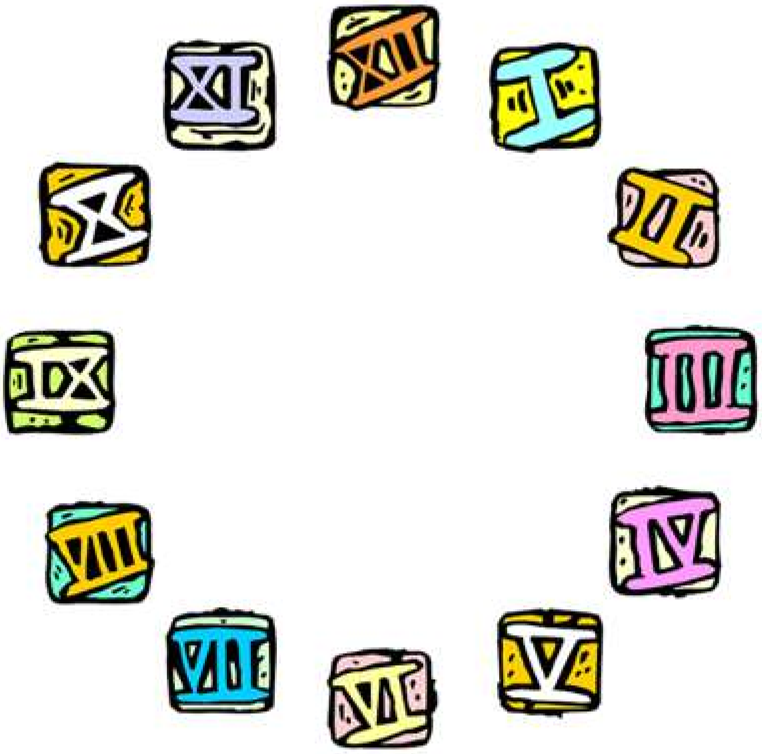
1. Haakjes
2. Machtsverheffen en worteltrekken
3. Vermenigvuldigen en delen
4. Optellen en aftrekken

Als twee bewerkingen even hoog op de lijst staan, moeten de bewerkingen van links naar rechts worden uitgevoerd.

Hoofdstuk 1

De ontwikkeling van getallenstelsels in onze geschiedenis

Afbeelding 1: Romeinse cijfers[1]



Al snel in onze geschiedenis werd bekend dat tellen erg belangrijk is. Door de duizenden jaren zijn er verschillende getallenstelsels bedacht om tellen zo makkelijk mogelijk te maken. Ook mensen die niet konden tellen bedachten oplossingen. Zo sneed een schapenherder evenveel sneetjes in een houten stok als het aantal schapen dat hij bezat. Op deze manier kon hij er makkelijk achterkomen als er een schaap vermist was. Later werden die getallenstelsels steeds beter. Maar hoe ontwikkelden die getallenstelsels zich nou precies?

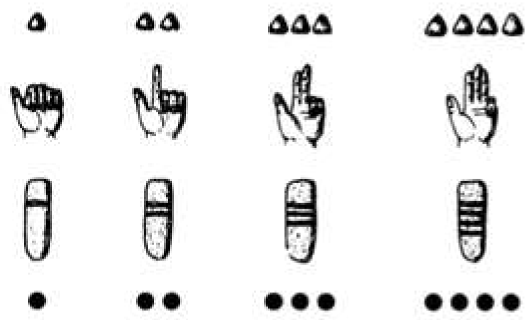
[1] KlasCement. (2019, 28 maart). *Getallenstelsels : Soorten en omzetting* [Illustratie]. https://www.klascement.net/downloadbaar-lesmateriaal/90998/getallenstelsels-soorten-en-omzetting/

1.1 Introductie

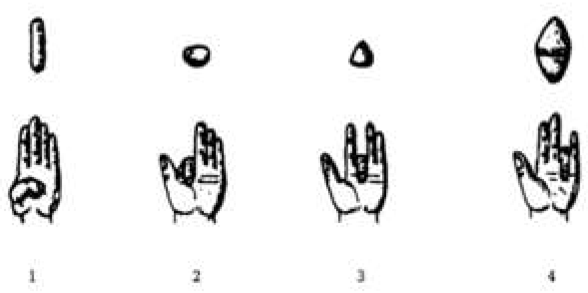
Het systeem dat wij tegenwoordig gebruiken in de wiskunde is een decimaal, positioneel stelsel. Dit houdt in dat het grondgetal van het stelsel 10 is en dat de plaats van een cijfer is een getal de waarde van dit cijfer aangeeft. Ons decimale stelsel heeft niet altijd bestaan en is ook niet het enige stelsel dat vroeger gebruikt werd. Voordat men kon tellen was er nog niet de noodzaak om te tellen, of om ingewikkelde rekensommen te maken.

1.1.1 Ordinale nummers en kerfstokken

Vanwege verschillende factoren, waaronder de evolutie van de mens die ervoor heeft gezorgd dat onze hersenen abstracte concepten kunnen begrijpen, en het feit dat de prehistorische mensen een bestaan gingen lijden waarin zaken zoals de hoeveelheid vee bijhouden werden uitgevoerd, ontstond de noodzaak om te tellen. Wanneer de taal van de mens zo ver was geëvolueerd dat het mogelijk was om hoeveelheden met woorden uit te drukken, begonnen mensen met tellen. Ze drukten echter hoeveelheden nog niet uit in kardinale nummers, zoals wij dat nu doen, maar ordinale nummers. Kardinale nummers worden gebruikt om de hoeveelheid van een verzameling ordinale nummers aan te geven. Van de verzameling {a, b, c, d, e, f,} is het kardinale nummer 6. a, b, c, d, e en f staan in deze verzameling elk voor een bepaald voorwerp. Wanneer de prehistorische mensen dus 6 koeien telden, konden zij dit niet in een kardinaal nummer uitdrukken, maar wel de hoeveelheid tellen en noteren.



[2] Afbeelding 2: ordinale weergave van getallen 1 tot en met 4



[3] Afbeelding 3: kardinale weergave van getallen 1 tot en met 4

[2] Ifra, G. (2005). *Ordinal representation of the first four numbers* [Illustratie]. http://www.ms.uky.edu/~sohum/ma330/files/Ifrah_numbers.pdf

[3] Ifra, G. (2005). *Cardinal representation of the first four numbers* [Illustratie]. http://www.ms.uky.edu/~sohum/ma330/files/Ifrah_numbers.pdf

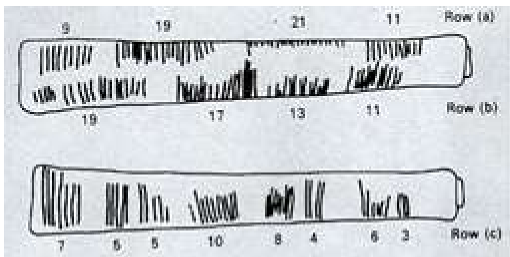
Om de ordinale nummers weer te geven werden vaak kerfstokken gebruikt. Dit was genoeg om kleine hoeveelheden te tellen en zo bijvoorbeeld te controleren dat de hoeveelheid vee niet was veranderd. De eerste, bekende artefacten die deze wijze van tellen aangeven komen uit Afrika. Naarmate samenlevingen groter begonnen te worden was het ook nodig om zaken als handel bij te kunnen houden, waarvoor het systeem met de kerfstokken niet geavanceerd genoeg was. Daarom ontstonden er systemen waarin wel kardinale nummers werden toegepast. In het begin waren deze systemen vooral van toepassing op het dagelijks leven en de handel. Uit artefacten blijkt het dan ook zo te zijn dat in het begin de wiskunde vooral werd toegepast op alledaagse zaken, en dus nauw verbonden was met het dagelijks leven. De eerste wiskundige problemen werden dan ook met woorden uitgedrukt, bijvoorbeeld; als 3 bananen 75 cent kosten, hoeveel kosten 7 bananen dan? De wiskunde die wij op dit moment kennen wordt nog steeds bij simpele, alledaagse activiteiten gebruikt, maar wij bezitten ook een abstractere vorm van wiskunde, waarvan de toepassing op het dagelijks leven misschien niet altijd snel te zien is. [1.14]

Het gebruik van kerfstokken, of in ieder geval een soortgelijke notatie van ordinale nummers, ontstond misschien wel als eerste in Afrika, maar dit betekent niet dat deze methode alleen in Afrika werd toegepast. Op veel andere plekken, zoals Europa, Azië, Oceanië en Noord- en Zuid-Amerika, waar contact met Afrika zo goed als onmogelijk was, werd dezelfde methode toegepast. Hiervoor werden vaak botten en stukken hout gebruikt, en de inkepingen waren redelijk gelijk aan elkaar. Dit kan onder andere komen doordat de beschikbare materialen gelijk waren, namelijk botten en hout, en dat de logische vorm van een inkeping een streep is; dit is namelijk de meest eenvoudige vorm die met een scherp voorwerp in een bot of stuk hout gezet kan worden. Hieruit blijkt dus dat de mens, wanneer de omstandigheden ongeveer gelijk zijn, gelijke ontdekkingen kan doen.

Het bekendste voorbeeld van prehistorische kerfstokken is het Ishango-beentje. Dit beentje is naar schatting 25.000 jaar oud en gevonden op de grens van Oeganda en Zaïre.


[4]

Afbeelding 4: Ishango-beentje voor- en achterkant



[5]

Afbeelding 5: Illustratieve weergave inkepingen Ishango-beentje

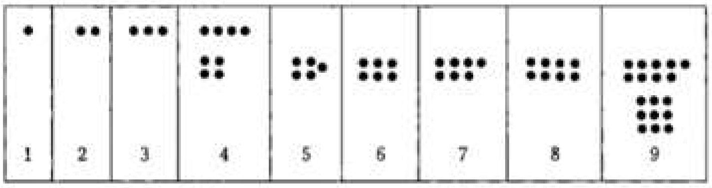
De inkepingen op dit beentje lijken een betekenis te hebben die verder gaat dan alleen hoeveelheden bijhouden. Bij rij a en b is de som van de inkepingen beide 60. In rij a staan getallen die dicht in de buurt komen van 10 of een meervoud van 10; 10 + 1, 10 - 1, 20 + 1 en 20 - 1. In rij b staan alle priemgetallen tussen 10 en 20. In rij c lijkt het alsof de maker van het beentje zich bewust was van hoe je met 2 kan vermenigvuldigen; eerst $3 \cdot 2 = 6$ en dan $4 \cdot 2 = 8$.

[4] *This image shows both the front and back of the Ishango bone.* (z.d.). [foto]. Geraadpleegd van https://www.cs.mcgill.ca/~rwest/wikispeedia/wpcd/wp/i/Ishango_bone.htm

[5] William, S. (z.d.). *Mathematicians of the African Diaspora* [illustratie]. Geraadpleegd van http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/ishango.html

Uit microscopisch onderzoek is gebleken dat enkele inkepingen niet zichtbaar zijn maar dat er ook sprake kan zijn van een 6 maanden lange maankalender wanneer deze inkepingen in beschouwing genomen worden. Geen van deze hypothesen is echter bewezen. Het is dus niet duidelijk of de maker van het beentje zich bewust was van getallen, en hoe hier mee om te gaan valt, of dat de maker puur hoeveelheden wilde bijhouden. Wel blijkt dat men rond deze tijd nog niet zover was om hoeveelheden abstract te kunnen weergeven in de vorm van kardinale nummers, en dus ordinale nummers gebruikte. [1.3]

Voordat de wiskunde zo ver was ontwikkeld dat er getallenstelsels ontstonden, moest er wel een meer geavanceerde methode ontstaan om hoeveelheden bij te houden. Artefacten tonen aan dat verschillende samenlevingen een methode ontwikkelde van turven waarbij hoeveelheden op materialen als klei werden bijgehouden. Hier konden tekens op worden aangebracht die niet in een bot of stuk hout gekerfd konden worden. Om hoeveelheden bij te houden, werd het aantal keer dat een bepaald voorwerp voorkwam genoteerd. Er waren hier verschillende schrijfwijzen voor. Een opmerkzame gelijkenis tussen deze schrijfwijzen is dat de aangebrachte tekens vaak in groepen van 5 of kleiner zijn aangebracht. Dit komt hoogstwaarschijnlijk doordat de mens moeite heeft met het registreren van groepen groter dan 5. [1.15]



[6] Afbeelding 6: Grieks telsysteem uit Epidaurus en Argos van 500 tot 200 v. Chr.

[7] Afbeelding 7: Telsysteem van de Minoïsche beschaving van 2000 tot 1500 v.Chr.

[6] Ifra, G. (2005). *Greece, Epidaurus and Argos, 5th to 2th centuries BCE* [Illustratie]. http://www.ms.uky.edu/~sohum/ma330/files/Ifrah_numbers.pdf

[7] Ifra, G. (2005). *Cretan civilization, hieroglyphic script: first half of second millenium BCE* [Illustratie]. http://www.ms.uky.edu/~sohum/ma330/files/Ifrah_numbers.pdf

1.1.2 Kardinale nummers en gelijke systemen

Naarmate samenlevingen groter werden, ontstond de noodzaak om kardinale nummers toe te passen. Wanneer een grote hoeveelheid ordinaal moest worden weergeven, was dat erg onhandig. Bij het gebruik van kardinale nummers ontstond echter ook een probleem; er konden niet oneindig veel nummers bestaan, want dat zou erg onhandig zijn voor notaties. Daarom kwamen verschillende samenlevingen op het idee om een positiestelsel toe te passen.

Een voorbeeld van een positiestelsel is het sexagesimale Babylonische stelsel. Wanneer een getal in een positiestelsel is geschreven, houdt dat in dat de waarde van een cijfer in een getal bepaald wordt door de positie van dit cijfer. Ons decimale stelsel is ook een positiestelsel. Een getal kan in een positiestelsel geschreven worden als $x_\infty \cdot a^\infty + \ldots + x_3 \cdot a^3 + x_2 \cdot a^2 + x_1 \cdot a^1 + x_0 \cdot a^0$ met $x_k \in \mathbb{N}$. Hierin is a het grondgetal van het stelsel. Zo is het decimale getal 80793 te schrijven als $8 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$.

Een ander systeem wat vaak gebruikt werd is het additieve stelsel. Hierin bepaalt de samenstelling van een getal de waarde van dit getal. Er bestaan meerdere varianten van dit systeem. Meestal is het echter zo dat de waarde van een getal berekend wordt door de verschillende onderdelen van dit getal bij elkaar op te tellen. Wanneer je dus een cijfer abcd hebt waarvan de waarde van a gelijk is aan 3, de waarde van b aan 4, de waarde van c aan 15 en de waarde van d aan 8, dan is de totale waarde van dit getal gelijk aan 3 + 4 + 15 + 8 = 30. Een voorbeeld van een dergelijk stelsel is dat van de Romeinen.

Al deze getallenstelsels ontstonden niet tegelijk, maar er zit wel een grote gelijkenis tussen de meeste stelsels. Zo ontstonden in Egypte, China en India decimale stelsels, zonder dat er sprake is geweest van uitwisseling van informatie tussen deze samenlevingen. Ook zijn er stelsels die misschien niet hetzelfde grondtal hebben, maar wel een erg gelijke werking.

Er zijn tussen de meeste getallenstelsel wel verschillen, zoals de tekens die voor cijfers worden gebruikt, maar de algemene werking komt erg vaak overeen. Wanneer de mens tegen een probleem aanloopt, en de sociale en culturele omstandigheden gelijk zijn, kan dezelfde oplossing op verschillende plekken gedaan worden, ook wanneer er geen contact is tussen deze plekken. Hieruit is ook aan te tonen waarom in de moderne wetenschap soms ook ontdekkingen tegelijkertijd worden gedaan door verschillende wetenschappers, terwijl deze geïsoleerd van elkaar zijn. Bekende voorbeelden hiervan zijn de ontdekking van analytische meetkunde door Fermat en Descartes en de ontdekking van differentiaalrekening door Isaac Newton en Gottfried Wilhelm Leibniz. [1.15]

1.1.3 Decimale stelsels

Een opmerkzame overeenkomst tussen de getallenstelsels van de Egyptenaren, Chinezen en Indianen, is dat deze allemaal decimaal waren. Zoals aangegeven werd, hoeft er geen sprake te zijn van uitwisseling tussen samenlevingen voor een gelijk werkend systeem. De meest voor de hand liggende reden dat meerdere samenlevingen voor een decimaal systeem kozen is dat er tien vingers op de handen zitten. Een eenvoudige manier van tellen is met de vingers. Als kind wordt je aangeleerd om met je vingers te tellen. De fysiologie van de mens is dus waarschijnlijk de reden dat vroeger vaak gekozen werd om een decimale stelsel te gebruiken. Wanneer de mens 8 vingers in plaats van 10 had, zou de kans groot zijn geweest dat er veel octale stelsels zouden zijn geweest. [1.14]

1.2 Het Babylonische stelsel

Het eerste systeem waarin kardinale nummers werden gebruikt werden, was het sexagesimale stelsel van de Sumeriërs, die van ongeveer 4000 tot 2000 v.Chr. in Mesopotamië leefden. Zij gebruikten echter niet de Arabische cijfers die wij nu kennen, maar het spijkerschrift. Dit stelsel werd later overgenomen en verbeterd door de Babyloniërs die van ongeveer 1800 v.Chr. tot 539 v.Chr. in Mesopotamië leefden. Het stelsel wordt dan vaak ook het Babylonische stelsel genoemd.

Mesopotamië (Grieks voor 'tussen de rivieren') is het gebied rond de rivieren Tigris en Eufraat, wat vroeger een erg vruchtbaar gebied was. Naast de Sumeriërs en de Babyloniërs leefden hier dan ook nog veel andere samenlevingen. Het gebied is meerdere keren overgenomen, en de opeenvolgende dynastieën spraken en schreven vaak in verschillende talen. Ook al dateren de wiskundige artefacten uit dit gebied terug naar de tijd dat de Babyloniërs heersden, het stelsel is vormgegeven door verschillende samenlevingen die allemaal hun steentje eraan hebben bijgedragen. De term 'Babylonisch stelsel' wekt de foute indruk op dat het stelsel alleen door de Babyloniërs werd gebruikt. Het is echter een overkoepelende term die wordt gebruikt voor het stelsel dat door verschillende samenlevingen is vormgegeven en uiteindelijk bij de Babyloniërs zijn einde vond. Het is wel zo dat de Babyloniërs de grootste bijdrage aan dit stelsel hebben geleverd. [1.14]

1.2.1 Ordinale nummers

Het Babylonische stelsel ontstond bij de Sumeriërs, die rond 4000 v.Chr. in het zuiden van het huidige Irak leefden. Hier zijn de wortels van onze moderne samenleving te vinden. Deze beschaving was één van de eerste die steden bevatte waarin handel plaatsvond.

In het begin gebruikte de Sumeriërs munten die iets vertegenwoordigde dat iemand bezat. Had je bijvoorbeeld 5 kippen, dan kreeg je 5 tokens. Wanneer een van de kippen verkocht werd of overleed, werd een van de tokens weer van je afgenomen. Dit systeem is van significante waarde in de geschiedenis van getallenstelsels omdat hiermee aftrekken, en dus rekenen, ontstond. Bij dit systeem werden overigens ordinale nummers gebruikt.

Daarna werden kegeltjes gebruikt die gemaakt waren van klei. De kegeltjes werden in zakjes gestopt en op de buitenkant van het zakje werden stempels gezet, precies evenveel stempels als het aantal kegeltjes dat zich in het zakje bevond. Dit systeem werd uiteindelijk efficiënter gemaakt door niet meer bijvoorbeeld vijf kegeltjes in een zakje te doen en hier vijf stempels op te zetten maar gewoon gelijk vijf inkepingen op een stukje klei te zetten.

[8]Afbeelding 8: Kegeltje dat als handelsmiddel gebruikt werd

[8] *Translated Sumerian Clay Cuneiform Foundation Cone*. (2020, 27 februari). [Foto]. Translated Sumerian Clay Cuneiform Foundation Cone. https://www.lot-art.com/auction-lots/Translated-Sumerian-Clay-Cuneiform-Foundation-Cone/85-translated_sumerian-27.2.20-artemi

Er is bij dit systeem nog steeds sprake van ordinale nummers. Het aantal voorwerpen dat een persoon bezit, werd weergegeven met een aantal stempels. Dit bracht echter een probleem met zich mee; de hoeveelheden werden te groot om met stempels weer te geven. Hierdoor ontstond de noodzaak om grote hoeveelheden met een bepaald teken weer te geven in plaats van stempels, oftewel, de noodzaak voor kardinale nummers was ontstaan. Voor het eerst werd er een getallenstelsel gebruikt met kardinale nummers. [1.4, 1.5, 1.8]

1.2.2 Het sexagesimale stelsel

[9]Afbeelding 9: kleitablet met spijkerschrift

Het Babylonische stelsel was een sexagesimaal stelsel, geschreven in spijkerschrift. Dit schrift heet zo omdat de figuurtjes die de cijfers aangeven op spijkers lijken. Eerst werden alle getallen nog met de hand in een stuk klei gekerft. Dit was echter niet erg efficiënt en dus koos men ervoor om een stylus te gebruiken die in een stukje klei gedrukt kon worden. Het uiteinde van de stylus had de vorm van een spijker. [1.9]

Het stelsel is tot nu toe het eerste, ontdekte positiestelsel. Het grondtal van het stelsel was 60, wat betekent dat het stelsel gebaseerd is op het getal 60. Het systeem dat de cijfers gebruiken is additief. Een rechtopstaande spijker ( ) heeft waarde 1. Een wik ( ) heeft waarde 10. Om een cijfer te noteren, wordt een bepaald aantal wikken en spijkers genoteerd, zodat de totale waarde van deze wikken en spijkers gelijk is van het te noteren cijfer. De cijfers worden wel positioneel gebruikt en dus is getallenstelsel in eerste instantie een positiestelsel, maar de cijfers gebruiken een additief systeem. Het getal staat voor $35 \cdot 60^2 + 13 \cdot 60^1 + 7 \cdot 60^0$, decimaal gelijk aan 126787. [1.10]

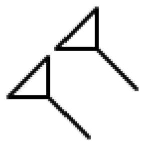
[10] Afbeelding 10: getallen in spijkerschrift

[9] The Trustees Of The British Museum. (z.d.). *Oudste loonstrookje ter wereld gevonden* [Foto]. Oudste loonstrookje ter wereld gevonden. https://historianet.nl/cultuur/oudste-loonstrookje-ter-wereld-gevonden

[10] Van Os, M., & Huisman, L. (2007). *Schrijfwijze van getallen* [illustratie]. Geraadpleegd van https://info.math4all.nl/Wiskundegeschiedenis/Onderdelen/RGBabylon.html

1.2.3 Nul

De Babyloniërs hadden in het begin geen teken voor nul. Ook hadden ze geen teken voor een lege plek in een getal. Een getal als $5 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60^1 + 7 \cdot 60^0$ kon dus niet genoteerd worden. Wanneer genoteerd werd, moest uit de context worden afgeleid of er $5 \cdot 60^1 + 7 \cdot 60^0$ stond, of bijvoorbeeld $5 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60^1 + 7 \cdot 60^0$, of $5 \cdot 60^3 + 0 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60^1 + 7 \cdot 60^0$. Omdat dit erg onhandig was, werd er rond 2000 v.Chr. een teken ingevoerd dat voor een lege plek in een getal stond. Dit teken stond echter niet voor 0, maar puur voor $0 \cdot 60^n$, en dus voor een lege plek in een getal. De Babyloniërs begrepen wel hoe ze ‘niets’ moesten weergeven met een getal, maar ze hadden nog geen apart teken voor 0. [1.21]



[11] Afbeelding 11: Babylonisch teken voor 0

1.2.4 Breuken

Om een breuk te noteren, wordt dezelfde notatiewijze gebruikt als bij de notatie van een geheel getal. In plaats van $x \cdot 60^n$, met $n \geq 0$, geldt er bij de breuken dat $n < 0$.   kon dus bijvoorbeeld staan voor $30 \cdot 60^1 = 1800$ of $30 \cdot 60^0 = 30$, maar ook voor $30 \cdot 60^{-1} = 1/2$ of $30 \cdot 10^{-2} = 1/120$. Uit de context van een tabel of berekening moest af te leiden zijn welke waarde een getal had en of het dus een breuk was of niet. [1.22]

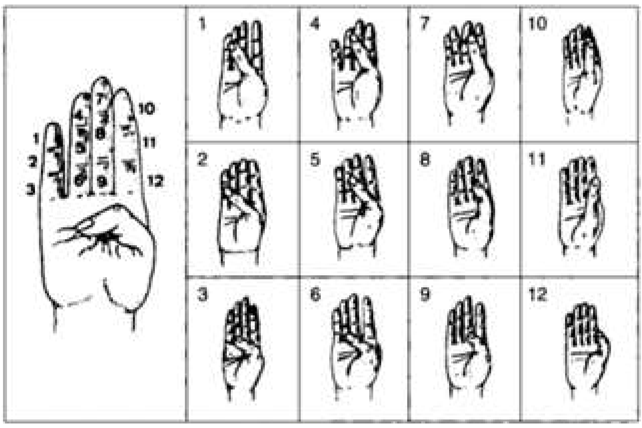
1.2.5 Oorsprong

De reden dat er voor een sexagesimaal getallenstelsel werd gekozen is niet achterhaald. Wel zijn hier meerdere hypothesen voor, waarvan de meest aanvaarde de goede deelbaarheid van 60 is. 60 wordt tegenwoordig ook wel een hogelijk samengesteld getal genoemd, wat betekent dat het door meer hele getallen gedeeld kan worden dan elk heel, positief getal dat een kleinere waarde heeft dan 60. 60 kan namelijk door maar liefst 12 getallen gedeeld worden; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 en 60. Hiermee is 60 het eerste getal dat deelbaar is door 1 tot en met 6. De goede deelbaarheid van 60 is ook de reden dat uren en minuten uit 60 getallen bestaan. Zo kan je een uur of minuut makkelijk in veel verschillende stukken delen. Dit kan niet bij een uur van bijvoorbeeld 100 minuten; 100 is niet deelbaar door bijvoorbeeld 3 en 6.

Ook is 60 makkelijk te tellen op je handen. Als de duim buiten beschouwing wordt gelaten zitten er twaalf knokkels op een hand. Wanneer je dit getal vijf keer telt (de hoeveelheid vingers op een hand), kom je uit op 60. Het sexagesimale stelsel heeft nog steeds invloed op de hedendaagse wereld. Zo heeft een cirkel 360 graden, een minuut zestig seconden en een uur zestig minuten. [1.7]

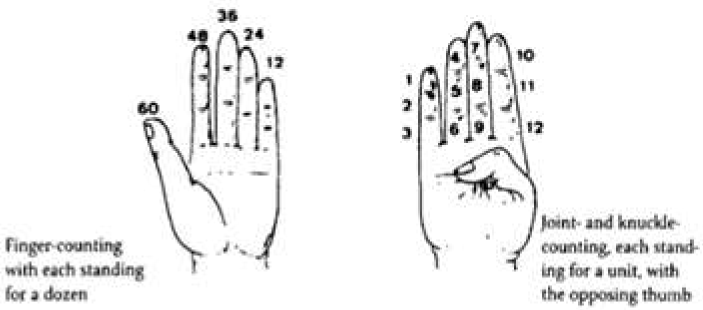
[11] *Babylonian cuneiform digit 0*. (2011). [Illustratie]. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Babylonian_digit_0.svg

Een andere hypothese is dat de keuze beïnvloed werd door de bouw van de menselijke hand. Er is een manier van tellen op de handen, waarbij op één hand 60 getallen geteld kunnen worden. Elke vinger heeft drie kootjes, behalve de duim, en dus kunnen 3 · 4 = 12 verschillende getallen op één hand geteld worden. Met de duim wordt een kootje aangewezen, en dit kootje staat voor een bepaald getal.



[12]Afbeelding 12: Tot 12 tellen op één hand

Om met twee handen tot 60 te tellen wordt ook de andere hand gebruikt. Wanneer begonnen wordt met tellen, is de duim van de ene hand op de pink geplaatst. Wanneer dan 12 is bereikt op de andere hand, wordt de duim verplaatst naar de ringvinger. Nu wordt op de andere hand geteld van 13 tot 24. Er zijn vijf vingers en 5 · 12 = 60, dus kan er met twee handen tot 60 geteld worden. [1.15]



[13]Afbeelding 13: tot 60 tellen op twee handen

Ook al is de oorsprong niet helemaal duidelijk, er is op dit moment redelijk veel bekend over het Babylonische stelsel. De reden hiervoor is dat er klei werd gebruikt om de berekeningen te noteren. Klei blijft goed behouden en daardoor zijn er veel kleitabletten intact gebleven. In de bibliotheek van de universiteit Yale in Amerika zijn duizenden kleitabletten opgeslagen. Deze tabletten kunnen onderverdeeld worden in een aantal categorieën; tabletten met tabellen van bijvoorbeeld kwadraten, tabletten met meetkundige en algebraïsche problemen en tabletten met waarnemingen die met natuurverschijnselen te maken hebben zoals de zonsopkomst. [1.10]

[12] Ifrah, G. (2005). *Fig 9.3* [Illustratie]. http://www.ms.uky.edu/~sohum/ma330/files/Ifrah_numbers.pdf

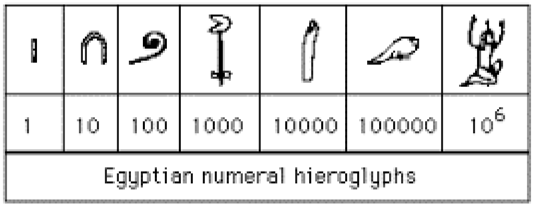
[13] Ifrah, G. (2005). *Fig 9.4* [Illustratie]. http://www.ms.uky.edu/~sohum/ma330/files/Ifrah_numbers.pdf

1.3 Egyptenaren

De egyptenaren gebruikten vanaf ongeveer 3000 v.Chr. een decimaal stelsel waarin cijfers geschreven werden als hiërogliefen. Het is bekend dat er uitwisselingen waren tussen Egypte en Mesopotamië voor het einde van het derde millennium v.Chr. Dit betekent echter niet dat de Egyptenaren hun stelsel van de Babyloniërs hebben overgenomen. Beide systemen zijn erg verschillend. Niet alleen is het Babylonische stelsel in eerste instantie een positiestelsel, en is het Egyptische stelsel additief, ook de gebruikte materialen verschillen enorm. Het enige wat de Egyptenaren van de Babyloniërs kunnen hebben overgenomen, is het idee om een getallenstelsel te gebruiken. De oorsprong van het Egyptische stelsel is ook minder bekend dan dat van de Babyloniërs, wat begon met de kleien kegeltjes. [1.14]

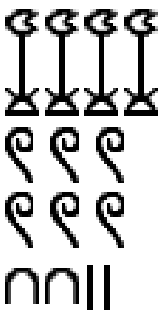
1.3.1 Hiërogliefen

De getallen werden in het Egyptische stelsel geschreven in de vorm van hiërogliefen. Elke hiëroglief had een andere waarde. De hiëroglyfen 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 en 10^6 worden respectievelijk geschreven als een enkele streep, paardenspan, touw, waterlelie, vinger, pad en als de god Heh. Om een veelvoud van één van deze getallen te schrijven wordt dit getal zo vaak opgeschreven dat de totale waarde gelijk is aan het te noteren getal. Een decimale 3 kan geschreven worden als 1 + 1 + 1 dus wordt 3 geschreven als 3 streepjes.



[14]Afbeelding 14: Egyptische hiërogliefen

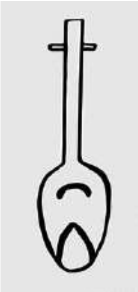
Er is dus sprake van een additief stelsel. Hierin maakt de positie van de tekens niet uit. De Egyptische getallen werden dan ook in beide horizontale richtingen geschreven, en zelfs verticaal, want de volgorde van de tekens maakt niet uit voor de waarde van het getal. Een voorbeeld is de volgende weergave van 4622, die afkomstig is van een tempel in Karnak.



[15]Afbeelding 15: weergave van 4622

[14] *Numeral Hieroglyphs*. (z.d.). [Illustratie]. https://onlinejudge.org/contests/250-0601c47b/11787.html
[15] *Hyroglyph Nefer*. (z.d.). [Illustratie]. Packageinspiration. https://packageinspiration.com/nefer-dad/

1.3.2 Nul



[16] Afbeelding 16: weergave nefer

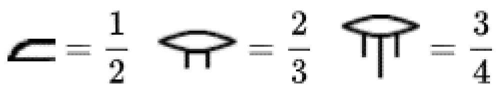
Rond 1740 voor Chr. hadden de egyptenaren een teken voor 0, genaamd nefer, wat weergegeven werd door een hart en een luchtpijp. Nefer staat voor perfectie en schoonheid, maar ook voor de ondergrens ergens van. Zo werden bij de bouw van piramides afstanden en hoogtes gemeten van nefer tot een met een bepaald punt. [1.11]
De Egyptenaren hadden een additief systeem. Zij zouden het decimale 202 schrijven als $100 + 100 + 1 + 1$, niet als het positionele $2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$, waarin een 'lege' plek voorkomt. Er is in dit stelsel dus geen noodzaak voor het getal 0 bij het noteren van getallen, wat wel het geval was bij het Babylonische stelsel. Toch was het getal 0 nuttig in het Egyptische stelsel. Zo werd het teken van nefer gebruikt bij de bouw van piramides. Ook werd het teken gebruikt bij boekhouding. Er zijn artefacten die aantonen dat vanaf 1770 v.Chr. het teken van nefer werd gebruikt bij dubbel boekhouden, waarbij debet en credit elkaar moeten compenseren, en er dus geen overblijfselen zijn. Debet is wanneer er geld uit een organisatie weggaat, en credit is wanneer er geld bij een organisatie binnenkomt. Nefer werd gebruikt om te noteren dat er een balans tussen debet en credit was. [1.16]

1.3.3 Breuken

De Egyptenaren hadden een systeem waarmee ze breuken konden weergeven. Hiervoor gebruikten ze een hiëroglief dat op een mond leek;

Ze gaven met dit hieroglyph echter alleen eenheidsfracties, oftewel, breuken waarvan de teller 1 is en de noemer een positief geheel getal. De noemer werd onder dit hieroglyph genoteerd;

Voor 1/2 en de breuken 2/3 en 3/4, wat geen eenheidsfracties zijn, werden andere notaties gebruikt;



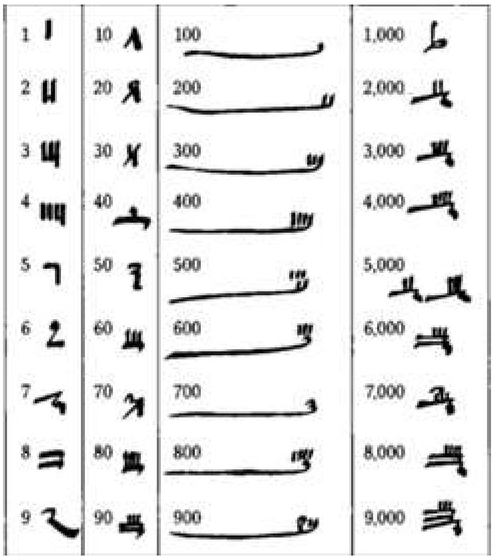
Deze notatie voor breuken ontstond tijdens het Middenrijk, wat de periode is die van ongeveer 2040 tot 1783 voor Chr. duurde. Verschillende artefacten tonen aan dat tijdens deze periode eenheidsfracties werden gebruikt, bijvoorbeeld het Kahun papyrus. Naast 2/3 en 3/4 konden de egyptenaren met deze notatiewijze alleen 1/n weergeven. Een breuk als 6/7 werd genoteerd als een som van verschillende eenheidsbreuken, namelijk 1/2 + 1/3 + 1/42. Later, tijdens de tweede tussenperiode, welke het Middenrijk opvolgende en van ongeveer 1783 tot 1570 voor Chr. duurde, schreef de schriftgeleerde Ahmes het Rhind papyrus. Hierin werd de notatiewijze van breuken verbeterd. Op dit papyrus staat onder andere een tabel waarin verschillende notaties van 2/n breuken zijn weergeven. Een voorbeeld

[16] *https://packageinspiration.com/nefer-dad/*. (2016, 17 mei). [Illustratie]. https://packageinspiration.com/nefer-dad/

hiervan is 2/9 = 1/6 + 1/18. Deze tabel werd hoogstwaarschijnlijk gebruikt als een referentietabel voor berekeningen. [1.12, 1.13]

1.3.4 Hiëratisch schrift

De hiërogliefen van de Egyptenaren waren erg uitgebreid, en daardoor lastig om te noteren. Ook konden getallen erg lang worden omdat er maar voor een aantal hoeveelheden een cijfer was. De hiërogliefen waren dan ook meestal decoratief. Er werd ook een ander schrift gebruikt voor praktische doeleinden; het hiëratische schrift. Hierbij waren cijfers voor de getallen 1 tot en met 9, 10 tot en met 90, 100 tot en met 900 en 1.000 tot en met 9.000.



[17]Afbeelding 17: Hiëratisch schrift

Dit schrift was ook additief, en de cijfers in een getal konden in een willekeurige volgorde geschreven worden. Om met dit schrift het getal 9999 te noteren, hoefde er maar 4 tekens genoteerd te worden in plaats van 36. [1.15]

[17] Ifrah, G. (2005). *Fig 14.32* [Illustratie]. http://www.ms.uky.edu/~sohum/ma330/files/Ifrah_numbers.pdf

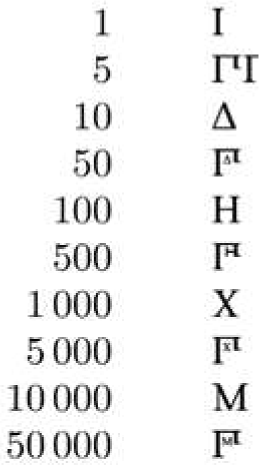
1.4 Oude Grieken

De Griekse wiskunde ontwikkelde zich later dan die in Mesopotamië en Egypte. Er wordt vaak beweerd dat de Babyloniërs en de Egyptenaren invloed hebben gehad op de Egyptische wiskunde. De Egyptenaren hadden in het begin van de Griekse wiskunde veel invloed op de Griekse wiskunde, wat ook terug te zien is in de vorm van het Griekse getallenstelsel. De Babylonische invloed op de Griekse wiskunde is vooral te zien in de astronomie, grotendeels in het werk van de Griekse astroloog Hipparchus. De wiskunde van de Griekse astronomie is dan ook in een sexagesimaal stelsel, niet het decimale stelsel dat normaal gesproken in de Griekse wiskunde werd gebruikt. [1.14]

In tegenstelling tot de oorsprong van de Griekse literatuur, die van ongeveer 800 v.Chr. tot 600 v.Chr. duurde, zijn er van het begin van de Griekse wiskunde weinig artefacten. Pas vanaf 400 v.Chr. werd er veel van de Griekse wiskunde vastgelegd. Hierdoor kan de oorsprong van de Griekse niet met zekerheid bepaald worden. [1.23]

1.4.1 Attisch stelsel

De oude Grieken hadden twee systemen. Het eerste hiervan is het attische stelsel, wat zijn oorsprong ergens tussen 800 v.Chr. en 600 v.Chr. in Athene vindt. De invloed van het Griekse stelsel is in het attische stelsel goed te zien. Het zijn namelijk beide additieve, decimale stelsels. Het attische stelsel heeft een speciaal teken voor de getallen 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1.000, 5.000, 10.000 en 50.000.



[18]Afbeelding 18: Attische tekens

[18] *Producing Attic Greek numerals*. (z.d.). [Illustratie]. https://tex.stackexchange.com/questions/210938/producing-attic-greek-numerals

1.4.2 Ionische cijfers

Rond 100 v.Chr. werd het Attische stelsel vervangen door het Ionische stelsel. Het Ionische stelsel gebruikt de 24 letters van het Griekse alfabet. Elke letter staat voor een bepaald cijfer. Het stelsel gebruikt ook een additief systeem. Naast het Griekse alfabet, zijn er in dit systeem nog drie andere tekens; digamma (F), wat staat voor 6, qoppa (Ϙ), wat staat voor 90 en sampi (ϡ), wat staat voor 900. De eerste acht letters van het alfabet staan voor de cijfers 1 tot en met 9 (met uitzondering van 6), de acht daarna staan voor de meervouden van 10 van 10 tot en met 80, de negen daarna staan voor de meervouden van 100 van 100 tot en met 800. Om dus bijvoorbeeld het decimale 792. te schrijven, werden de drie letters ΨϘΒ geschreven, die respectievelijk voor 700, 90 en 2 staan. Om duizendtallen te noteren, werd een komma voor het getal genoteerd. Als bijvoorbeeld het decimale 3000 genoteerd moest werd, werd er ,Ɣ geschreven. [1.24]

1	α	alpha	10	ι	iota	100	ρ	rho
2	β	beta	20	κ	kappa	200	σ	sigma
3	γ	gamma	30	λ	lambda	300	τ	tau
4	δ	delta	40	μ	mu	400	υ	upsilon
5	ϵ	epsilon	50	ν	nu	500	ϕ	phi
6	ϛ	vau*	60	ξ	xi	600	χ	chi
7	ζ	zeta	70	ο	omicron	700	ψ	psi
8	η	eta	80	π	pi	800	ω	omega
9	θ	theta	90	ϙ	koppa*	900	ϡ	sampi

*vau, koppa, and sampi are obsolete characters

[19]Afbeelding 19: Griekse tekens en waardes hiervan

1.4.3 Nul

Veel van de Griekse wiskunde werd in woorden gedaan. Een voorbeeld is de derde stelling van Archimedes in zijn werk 'Over het meten van een cirkel'; Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστί, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις, oftewel, de omtrek van elke cirkel is driemaal de diameter plus een hoeveelheid kleiner dan een zevende van de diameter en groter dan tien eenenzeventigste. In de hedendaagse wiskunde zou dit genoteerd worden als $3.141 < \pi < 3.143$. Het woord 'niets' (μηδέν) stond in de Griekse wiskunde voor nul. Nul was niet noodzakelijk voor de notatie van getallen omdat het stelsel additief was. Wanneer er 790 geschreven moest worden, werd er geen teken voor 0 genoteerd, alleen de tekens van 700 en 90, oftewel ΨϘ. [1.25]

In de astronomie werd om breuken te noteren een systeem gebruikt dat erg op het Babylonische stelsel leek. Er werd dan ook een sexagesimaal, positioneel stelsel gebruikt voor deze breuken. De Griekse astronomen hadden het alfabet uitgebreid zodat er 59 tekens waren, en een teken voor 0. Deze nul was echter plaats houdend, net als bij de Babyloniërs. Dit sexagesimale stelsel van de Grieken werd strikt voor de notatie van breuken gebruikt. [1.26]

[19] *Greek numbers*. (z.d.). [Illustratie]. https://www.greece.com/info/language/greek_numbers/

1.5 Romeinen

De romeinse nummers ontstonden in het Romeinse rijk, dat van 753 v.Chr. tot 476 n.Chr. bestond. Na de val van het Romeinse rijk bleven de Romeinse cijfers nog tot laat in de middeleeuwen het standaard stelsel in Europa. Rond de 14e eeuw werd het Romeinse stelsel vervangen voor Arabische cijfers, maar dit verliep geleidelijk. Zo worden de romeinse cijfers tegenwoordig nog steeds gebruikt, zoals bij het nummeren van vorsten, of op wijzerplaten. [1.19]

Het Romeinse rijk werd tussen 850 v.Chr. en 750 v.Chr opgericht. Het gebied werd toen ook bewoond door andere samenlevingen, waarvan de Etrusken het meest ontwikkeld waren. Het Romeinse stelsel is gebaseerd op het stelsel van de Etrusken. De oorsprong van het stelsel van de Etrusken is niet bekend, maar er zijn wel hypotheses hiervoor. Zo kan het stelsel gebaseerd zijn op de hand signalen die gebruikt worden bij tellen. Ook kan het zo zijn dat de gebruikte tekens in dit stelsel gebaseerd zijn op kerfstokken. Geen van beide hypotheses is echter bewezen. [1.18]

1.5.1 Werking van het stelsel

Bij het Romeinse stelsel werden 7 tekens gebruikt, elk met een andere waarde; I, V, X, L, C, D, en M. De waarde van deze tekens is respectievelijk 1, 5, 10, 50, 100, 500 en 1000. Ze hadden meerdere manieren om grotere cijfers te noteren. Zo kon er een vinculum boven een getal geschreven worden, waardoor het getal met 1.000 vermenigvuldigt werd, bijvoorbeeld $\overline{\mathrm{V}}$ = 5.000. Er konden daarnaast rechte haken om een getal gezet worden, wat het getal ook met 1.000 vermenigvuldigt. $|\overline{\mathrm{V}}|$ staat dus voor 5.000.000

Het stelsel is additief, dus de waarde van een getal is gelijk aan de samenstelling van het getal;

II = 2
XXX = 30
XII = 12
CXXIII = 123 [1.20]

In tabel 1 is te zien hoe een aantal hoeveelheden genoteerd konden worden.

Tabel 1: Hoeveelheden in Romeins stelsel

	Duizenden	Honderden	tientallen	Eenheden
1	M	C	X	I
2	MM	CC	XX	I
3	MMM	CCC	XXX	I
4	M$\overline{\mathrm{V}}$	CD	XL	IV
5	$\overline{\mathrm{V}}$	D	L	V

6	$\overline{V}$M	DC	LX	VI
7	$\overline{V}$MM	DCC	LXX	VII
8	$\overline{V}$MMM	DCCC	LXXX	VIII
9	M$\overline{X}$	CM	XC	IX

1.5.2 Notatie regel

De notatie van de getallen $4 \cdot 10^n$ en $9 \cdot 10^n$ verloopt anders dan de notatie van andere getallen. De regel is dat een getal met de zo min mogelijk tekens wordt geschreven. 15 wordt dus als XV geschreven, niet als VVV of XIIIII. Hierdoor konden erg lange getallen ontstaan, bijvoorbeeld 99; LXXXXVIIII. Daarom werd later de regel ingevoerd dat wanneer een teken links stond van een teken met een grotere waarde (bijvoorbeeld IV), dan betekent dat de waarde van het getal gelijk is aan het rechter teken min het linker teken (oftewel V - I = 4). 99 kan nu dus geschreven worden als CMIX.

Er zijn wel een aantal regels bij het gebruiken van deze aftrek regel om cijfers samen te stellen;

1. Alleen I, X en C mogen gebruikt worden als linker getal. De vijftallen V, L en D mogen niet gebruikt worden. M kan bij deze regel niet gebruikt worden, want dat is het teken met de grootste waarde. Dit betekent dus dat deze regel alleen van toepassing is op de getallen $4 \cdot 10^n$ en $9 \cdot 10^n$.

2. Het linker teken mag niet meer dan een tiende kleiner zijn dan het rechter teken. 49 is dus XLIX (50-10 + 10-1), niet IL (50-1).

3. Er kan maar één kleiner teken aan de linkerkant van een groter teken geschreven worden. 19 kan dus geschreven worden als XIX (10 + 10-1), maar 17 niet als XIIIX (10 + 10-1-1-1) of IIIXX (10-1-1-1 + 10). Deze regel wordt echter soms verbroken wanneer er een getal met een 8 genoteerd wordt. Zo zijn er monumenten waarop de notatie IIXX (10-1-1 + 10) voor 18 voorkomt. Een voorbeeld van incorrect gebruik van deze regel is op het standbeeld '*A Sower*' van Hamo Thornycroft, waarop de notatie MCMXXIIX voor 1928 is gebruikt. [1.20]

[20]

Afbeelding 20: notatie van 1928 op het standbeeld van Hamo Thornycroft

[20] Lewis, P. (2005). *This inscription for 1928 breaks one of the rules about subtractive numbers.* [Foto]. http://www.web40571.clarahost.co.uk/roman/howtheywork.htm

1.5.3 Nul

De Romeinen hadden geen positioneel stelsel, en dus was er niet de noodzaak voor een 0 als plaats houdend cijfer. Ze hadden echter ook geen nul als apart getal. Het woord *nulla*, wat staat voor niks, werd uiteindelijk gebruikt als 0. Het teken hiervoor was N. Het gebruik hiervan vond echter pas vanaf 525 n.Chr plaats, na de val van het Romeinse rijk. [1.19]

1.5.4 Breuken

Er waren maar een aantal breuken die de Romeinen konden noteren. Een S stond voor 1/2. Een horizontale streep stond voor 1/12. Hetzelfde systeem werd gebruikt voor de notatie van breuken als voor de notatie van getallen.

Tabel 2: Romeinse notatie van breuken

Romeinse notatie	Decimale notatie
-	1/12
=	2/12 of 1/6
=-	3/12
==	4/12 of 2/6
==-	5/12
S	1/2
S-	1/2 + 1/12 of 7/12
S=	1/2 + 2/12 of 2/3
S=-	1/2 + 3/12 of 3/4
S==	1/2 + 4/12 of 5/6
S==-	1/2 + 5/12 of 11/12

Andere breuken dan degenen die in tabel 2 zijn weergegeven, werden door de Romeinen niet gebruikt. [1.20]

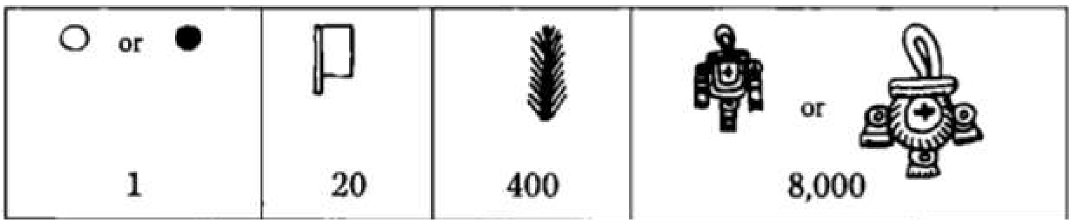
1.6 Maya's

Er zijn veel verlaten steden gevonden in Centraal-Amerika. Er hebben hier vroeger meerdere samenlevingen geleefd, waarvan de eerste ontwikkelde de Maya's is. Rond 3000 v.Chr. tot 2000 v.Chr. vond de vorming van de samenleving van de Maya's plaats. Tussen 2000 v.Chr. en 250 n.Chr ontwikkelde deze samenleving zich verder. Deze samenleving bleef tot laat in de middeleeuwen bestaan.

Ze gebruikten een apart cijfersysteem voor de gewone burger en voor de priesters, die ook gelijk de wetenschappers van de samenleving waren. Beide stelsels waren 20-tallig, wat alle precolumbiaanse, Centraal-Amerikaanse samenlevingen overigens in het algemeen hebben. Het speciale aan de wiskunde van de priesters, is dat ze erg nauwkeurige berekeningen hebben gedaan, terwijl ze niet de materialen hadden die de Europeanen hadden om dezelfde berekeningen te maken. Zo was de omlooptijd van de aarde om de zon die zij hadden berekend 365,242 dagen. De hedendaagse omlooptijd is 365,242198. Dit hebben ze berekend zonder dat ze beschikking hadden tot glas (en dus geen lenzen), uurwerk, zandlopers of een manier om een dag op te delen in kleinere delen (uren, minuten, seconden). Ook hadden ze nog geen breuken. Toch waren ze in staat om erg nauwkeurige berekeningen te doen. [1.15]

1.6.1 Het stelsel van de gewone burger

Het stelsel van de gewone burger was een 20-tallig, additief stelsel. Er waren tekens voor 1, 20, 400 en 8000. Met dit stelsel werden geen ingewikkelde berekeningen gedaan. Er zijn dan ook amper berekeningen met dit stelsel bewaard gebleven. [1.15]



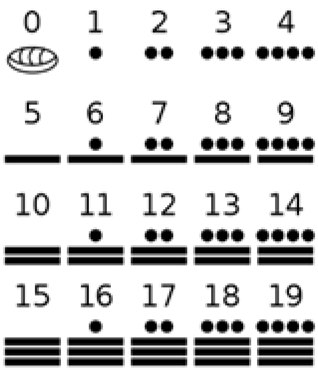
[21]

Afbeelding 21: Mayaanse cijfers van de gewone burger

[21] Ifrah, G. (2005). *Aztec numerals* [Illustratie]. http://www.ms.uky.edu/~sohum/ma330/files/Ifrah_numbers.pdf

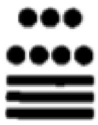
1.6.2 Het stelsel van de priesters

De Mayaanse priesters gebruikten ook een 20-tallig stelsel. Hierbij werden de cijfers, net als bij de Babyloniërs, additioneel samengesteld en een getal werd, ook net als de Babyloniërs, positioneel samengesteld. In een cijfer heeft een stip een waarde van 1 en een streep een waarde van 5. Dit stelsel was niet beïnvloed door de Babyloniërs, de Maya's hebben zelfstandig een positioneel stelsel ontwikkeld.



[22]Afbeelding 22: Maya cijfers

Om een getal te schrijven, werden meerdere cijfers boven elkaar geschreven. Het onderste cijfer werd met 20^0, oftewel 1, vermenigvuldigt. Het getal daarboven met 20^1;

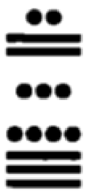


$\rightarrow 3 \cdot 20^1$

$\rightarrow 19 \cdot 20^0$

Dit getal is dus gelijk aan $3 \cdot 20^1 + 19 \cdot 20^0 = 79$ (decimaal).

Logisch zou zijn dat elk getal na $x \cdot 20^1$ telkens met een hogere macht van 20 vermenigvuldigt zou worden. Dit is echter niet het geval voor de derde rij van onder. In plaats van $x \cdot 20^2$, staat het cijfer in deze rij voor $x \cdot 20^0 \cdot 360$;



$\rightarrow 12 \cdot 20^0 \cdot 360$
$\rightarrow 3 \cdot 20^1$

$\rightarrow 19 \cdot 20^0$

Dit getal is dus gelijk aan $12 \cdot 20^0 \cdot 360 + 3 \cdot 20^1 + 19 \cdot 20^0 = 4399$ (decimaal).

De rijen boven de derde staan allemaal voor een macht van 20, telkens één macht hoger dan de vierde rij, vermenigvuldigt met 360. Het getal in de vierde rij van onder staat dus voor $x \cdot 20^1 \cdot 360$ en de vijfde voor $x \cdot 20^2 \cdot 360$. [1.15]

[22] Wikipedia Contributors. (2019, 22 december). *Mayacijfers 0 t/m 19* [Illustratie]. Wikipedia. https://nl.wikipedia.org/wiki/Mayacijfers

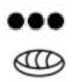
1.6.3 Nul

De Maya’s hadden een teken voor 0, namelijk een ovale vorm. Deze 0 werd gezien als apart getal, en kon ook in een getal gebruikt als plaats houdend cijfer (wat nodig was omdat het een positioneel stelsel was). De nul heeft hierbij echter niet dezelfde invloed op een getal als de 0 in het decimale stelsel. Een 0 aan het eind van een decimaal getal plaatsen, zorgt ervoor dat elk ander cijfer in het getal met 10 vermenigvuldigt wordt;

$34 = 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$

$340 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$

Een nul achter een getal geschreven in het stelsel van de Maya’s heeft niet dezelfde invloed, vanwege de regel dat elk cijfer vanaf de derde rij van onder in een getal met $20^0 \cdot 360$ vermenigvuldigt wordt;



$\rightarrow 3 \cdot 20^1$
$\rightarrow 0 \cdot 20^0$

De waarde van dit getal is $3 \cdot 20^1 + 0 \cdot 20^0 = 60$ (decimaal geschreven). Nog een nul achter dit getal zetten geeft;

$\rightarrow 3 \cdot 20^0 \cdot 360$
$\rightarrow 0 \cdot 20^1$
$\rightarrow 0 \cdot 20^0$

De waarde van dit getal is $3 \cdot 20^0 \cdot 360 + 0 \cdot 20^1 + 0 \cdot 20^0 = 1080$, wat niet gelijk is aan 1200 ($60 \cdot 20$). [1.15]

1.6.4 Mayakalender

De Mayaanse priesters gebruikten een erg ontwikkelde kalender. Deze kalender bevatte meerdere kringlopen, waarvan de belangrijkste de lange telling, de Haab kalender en de Tzolkin kalender zijn. De lange telling was bedoeld voor historische doeleinden. De Haab kalender was voor de burgers bedoeld, en duurde 365 dagen. De Tzolkin kalender had religieuze doeleinden, en duurde 260 dagen. De dagen werden bij alle drie de kalenders geteld als een serie op elkaar volgende dagen en werd niet gebaseerd op de bewegingen van de zon en maan. Dit lijkt erg op moderne kalenders als de Juliaanse kalender, of de datuminstellingen in een computersysteem. Een ander modern kenmerk van de Mayakalender, is dat de eerste dag geteld werd als dag 0, niet als dag 1, wat het geval was bij andere kalenders. [1.27]

Lange telling

De lange telling bestaat uit een aantal cycli, die elk een ander aantal dagen had.

Tabel 3: Cycli in de Lange telling

Cycli	Samenstelling	Aantal dagen	Aantal jaren (afgerond)
kin		1	
uinal	20 kin	20	
tun	18 uinal	360	0,986
katun	20 tun	7.200	19,7
baktun	20 katun	144.000	394,3
pictun	20 baktun	2.880.000	7.885
calabtun	20 pictun	57.600.000	157.704
kinchiltun	20 calabtun	1.152.000.000	3.154.071
alautun	20 kinchiltun	23.040.000.000	63.081.429

De cycli pictun, calantun, kinchiltun en alautun werden amper gebruikt. Een datum in dit systeem werd weergeven als baktun, katun, tun, uinal, kin. Dit staat dus eigenlijk voor $a \cdot 1 + b \cdot 20 + c \cdot 360 + d \cdot 7.200 + e \cdot 144.000$ dagen. Er zit hierin een gelijkenis met het stelsel dat de Mayaanse priesters gebruikten. Er staat namelijk eigenlijk $a \cdot 1 \cdot 20^0 + b \cdot 20^1 + c \cdot 360 \cdot 20^0 + d \cdot 360 \cdot 20^1 + e \cdot 360 \cdot 20^2$. De telling van de dagen komt dus overeen met de werking van het stelsel van de Mayaanse priesters. De Mayaanse priesters waren de wiskundigen en tegelijkertijd de astronomen van de Mayaanse samenleving. Omdat zij konden 'bepalen' welk werking het wiskundige stelsel had, hebben zij waarschijnlijk gekozen voor het gebruikte stelsel omdat het gunstig is met astronomische berekeningen. [1.27]

Haab

De Haab werd gebruikt als kalender voor de gewone burger en had 365 dagen. Een jaar was opgedeeld in 18 delen van 20 dagen, en 5 dagen aan het eind van het jaar genaamd Uayeb-dagen. Bij dit systeem werd geen jaartelling gebruikt en dus is het bij monumenten niet duidelijk uit welk jaar ze stammen wanneer de datum in Haab is genoteerd. Ook werd bij dit systeem geen rekening gehouden met een schrikkeljaar, dus elk jaar schoven de seizoenen één dag op. [1.27]

Tzolkin

Om religieuze gebeurtenissen bij te houden werd de Tzolkin gebruikt, die 260 dagen duurt. Een jaar werd opgedeeld in 13 periodes van 20 dagen (die allemaal een andere naam hadden). De datum werd genoteerd door de periode te noteren en de naam van de dag te noteren. Bij dit systeem werden, net als bij de Haab, geen jaarnummers gebruikt. Om toch data duidelijk te kunnen noteren, werden vaak de Tzolkin datum en Haab datum beide genoteerd. Het kleinste getal dat door 260 en door 365 gedeeld kan worden is 18.980. Een datum herhaalt zich pas als er 18.980 dagen (52 jaar) zijn verstreken. Hierdoor werden data minder snel door elkaar gehaald. [1.27]

1.7 Chinezen

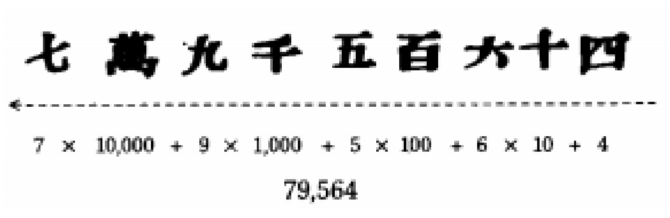
Ook de Chinezen zijn op het idee gekomen om een positioneel stelsel te gebruiken. Net als wij op dit moment doen, gebruikten zij een decimaal, positioneel stelsel. Dit stelsel wordt ook gebruikt in Korea, Japan en tot de vorige eeuw in Vietnam. De Chinezen gebruiken het stelsel ook nog, in combinatie met de Arabische cijfers. De Chinezen hebben dit stelsel zonder invloed van de Babyloniërs of Maya's bedacht. [1.15]

1.7.1 Werking van het stelsel

Er worden 13 verschillende cijfers gebruikt; voor 1 tot en met 9 en voor de vier eerste machten van 10.

[23] Afbeelding 23: Chinese cijfers

Om een getal te noteren, werd een combinatie van optellen en vermenigvuldigen. Om 8.000 te noteren, wordt eerst een 8 genoteerd en dan 1.000, oftewel 8 keer 1.000. Neem bijvoorbeeld 79.564, dit wordt genoteerd als $7 \cdot 10.000 + 9 \cdot 1.000 + 5 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 4$.



[24] Afbeelding 24: 79.564 in Chinese cijfers

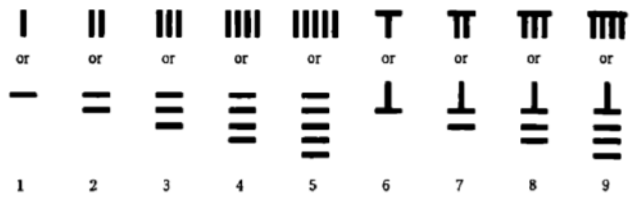
Dit lijkt erg op ons stelsel, alleen wij zetten niet achter elk cijfer met welke waarde van 10 het vermenigvuldigd moet worden, dat moet blijken uit de positie van het cijfer in het getal. Het voordeel van het Chinese stelsel is dat er geen nul nodig is als plaatshouder. Om 805 te noteren, wordt er $8 \cdot 100 + 5$ genoteerd. In ons huidige stelsel is er in 805 wel een 0 nodig als plaatshouder omdat de waarde van het getal anders verandert. [1.15]

[23] Ifrah, G. (2005). *Fig 21.1* [Illustratie]. http://www.ms.uky.edu/~sohum/ma330/files/Ifrah_numbers.pdf

[24] Ifrah, G. (2005). *Fig 21.3* [Illustratie]. http://www.ms.uky.edu/~sohum/ma330/files/Ifrah_numbers.pdf

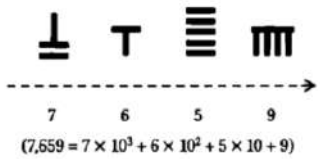
1.7.2 Chinese geleerden

De Chinese geleerden gebruikten een ander stelsel. Dit was een positioneel, decimaal stelsel. De cijfers van dit stelsel werden echter additief opgesteld.



[25] Afbeelding 25: Chinese cijfers

Omdat het stelsel positioneel is, wordt de waarde van een cijfer in een getal bepaald door de positie. 7.659 werd dus als volgt weergegeven;



[26] Afbeelding 26: Chinese notatie van 7.659

Bij dit stelsel is een plaatshoudende nul noodzakelijk. Deze werd echter pas rond 800 n.Chr ingevoerd, onder invloed van de Indiërs, terwijl het stelsel van de Chinese geleerden al vanaf 200 v.Chr gebruikt werd. [1.15]

---

[25] Ifrah, G. (2005). *Learned Chinese number-system* [Illustratie]. http://www.ms.uky.edu/~sohum/ma330/files/Ifrah_numbers.pdf

[26] Ifrah, G. (2005). *Learned Chinese number-system* [Illustratie]. http://www.ms.uky.edu/~sohum/ma330/files/Ifrah_numbers.pdf

1.8 Overzicht

Hoe vanzelfsprekend het positionele stelsel tegenwoordig ook is, dat is het niet altijd geweest. Toen de noodzaak ontstond voor de notatie van grote getallen, kwamen meerdere samenlevingen op het idee van een additief systeem. Er zijn nog veel meer soorten stelsels die een additief systemen toepasten, die niet in dit hoofdstuk zijn besproken. Ze kwamen op hetzelfde neer; om een getal te noteren werden meerdere cijfers bij elkaar opgeteld. Dit zorgde er echter voor dat sommige getallen erg lang waren.

De Babyloniërs loste dit probleem gedeeltelijk op door alleen de cijfers additief samen te stellen, en een getal positioneel samen te stellen. Dit resulteerde echter alsnog in erg lange cijfers. Ook waren en samenlevingen, zoals de Romeinen, die tussenliggende eenheden gebruikten (5, 50, 500, 5.000…). De Egyptenaren losten dit probleem op door, in plaats van de ingewikkelde hiëroglyfen, makkelijker te noteren hiëroglyfen te gebruiken. Dit waren uiteindelijk 36 verschillende cijfers, die ze allemaal moesten onthouden.

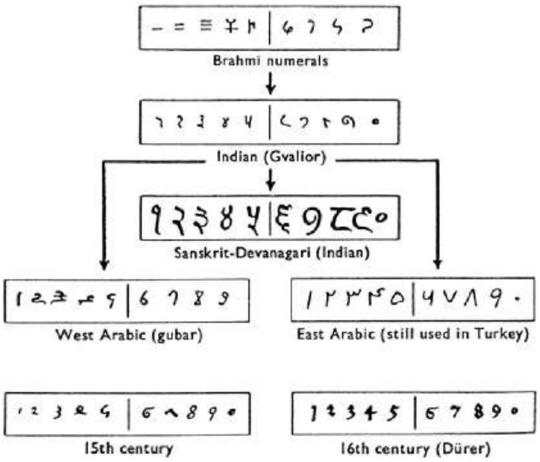
Uiteindelijk zijn er drie samenlevingen geweest die een positioneel stelsel hebben bedacht; de Babyloniërs, de Maya's en de Chinezen.

De Babyloniërs gebruikten wel een positioneel stelsel, maar het is nooit bij hun opgekomen om voor elk van hun 59 cijfers een apart symbool te bedenken. De Maya's kwamen ook niet op het idee om elk van hun cijfers een apart symbool te geven. De Chinezen waren al aardig op weg naar het stelsel dat wij nu kennen. Het verschil tussen ons stelsel (naast de gebruikte symbolen), is dat zij voor elk cijfer in een getal aangaven met welke macht van het grondtal het vermenigvuldigd moest worden. In plaats van 8020 (decimaal) schreven zij dus $8 \cdot 1000 + 2 \cdot 10$.

De oorsprong van ons huidige stelsel is niet te vinden bij de Babyloniërs, Maya's of Chinezen, maar bij de Indiërs. Er zijn een aantal belangrijke verschillen tussen het stelsel uit India en de andere positionele stelsels. De Indianen hadden bijvoorbeeld cijfers waarvan de symbolen niet een bepaalde betekenis hadden, alleen maar een bepaalde waarde. De cijfers bij de andere positionele stelsel werden additief samengesteld. Daarnaast hadden de Indiërs een nul die niet alleen plaats houdend was in een getal, maar ook een apart cijfer was. Dit hadden de Maya's echter ook. De Indiërs gebruikten het positionele systeem dat wij tegenwoordig gebruiken. [1.15]

1.9 Oorsprong huidig decimaal stelsel

Ons huidige stelsel vindt zijn oorsprong in India. De Indiërs gebruikten vroeger al de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en 0, maar dan met een andere notatie. Deze notaties werden telkens aangepast, maar de betekenis van elk cijfer bleef hetzelfde. De huidige notatie is terug te leiden naar de Brahmi cijfers, die uit 300 v.Chr stammen. Deze Brahmi cijfers werden echter niet in een positioneel stelsel gebruikt [1.15]



[27] Afbeelding 27: Brahmi cijfers en opvolgers

1.9.1 Indisch stelsel 300 v.Chr tot 700 n.Chr

Bij het oudste Indiase stelsel werden de Brahmi nummers gebruikt. Dit stelsel was decimaal. Ook al stamt ons stelsel van dit stelsel af, er zitten veel verschillen tussen. Zo was het Indiase stelsel additief. Er was een cijfer voor de cijfers 1 tot en met 9, 10 tot en met 90, 100 tot en met 900, 1.000 tot en met 9.000 en 10.000 tot en met 90.000. Om een getal te noteren als 24.500 werd het teken van 20.000, 4.000 en 500 genoteerd. [1.15]

1.9.2 Invloed van andere stelsels

Ons huidige stelsel stamt zonder twijfel af van het positionele stelsel uit India. Het moment waarop dit stelsel precies ontwikkeld is, is niet bekend. Wel is bekend dat dit voor 700 n.Chr moet zijn geweest. Het is bekend dat de Maya's geen contact hebben gehad met de oude Indiërs, en het stelsel van de Indiërs niet geïnspireerd kan zijn door dat van de Maya's.

Als het stelsel van de Indiërs geïnspireerd is door dat van de Babyloniërs, moet dat door de invloed van de Grieken op de Indiërs zijn gekomen. De Babylonische samenleving was namelijk al uiteen gevallen voor de opkomst van de Indische samenlevingen. De Grieken hebben wel contact gehad met de Indiërs, ongeveer gelijktijdig met de ontwikkeling van het positionele stelsel in India, dus invloed

[27] Acharya, E. R. (2018, 4 juni). *Table 2: Brahmi Numeral System and its Successor* [Illustratie]. https://www.semanticscholar.org/paper/Evidences-of-Hierarchy-of-Brahmi-Numeral-System-Acharya/585619d829e3b8799e8987cf8216d6743b59affd/figure/1

van de Grieken op de Indiërs zou mogelijk kunnen zijn. De Grieken gebruikten echter alleen maar een positioneel, sexagesimaal stelsel voor de notatie van breuken bij astronomie. De kans dat een dergelijk klein deel van de Babylonische wiskunde voor de ontwikkeling van een heel stelsel heeft gezorgd, is ongeloofwaardig, maar niet uit te sluiten.

Invloed van de Chinezen op de Indiërs is veel logischer. Niet alleen is het Chinese stelsel decimaal en positioneel, ook lijken de eerste drie cijfers uit de stelsel veel op elkaar. Toch is er geen concreet bewijs dat het Indische stelsel beïnvloed is door de Chinezen. Ook hadden de Chinezen later een 0 als apart cijfer dan de Indiërs. Dit komt doordat het Indische stelsel vanaf 800 n.Chr zich verspreidde naar andere landen, waaronder China. Het Indische stelsel heeft met zekerheid invloed gehad op het Chinese stelsel, niet andersom. [1.15]

1.9.3 Ontstaan en verspreiding positioneel stelsel

Het positionele stelsel werd gebruikt bij het Bakshali manuscript, wat niet uit later dan 400 n.Chr kan stammen. De ontwikkeling van het positionele stelsel vond plaats in de Gupta periode, die van 400 n.Chr tot 600 n.Chr. duurde. Deze tijd was een hoogtepunt in de Indische beschaving. De Indische kunst, literatuur en filosofie waren op een enorm hoog niveau tijdens de Gupta periode. Ook ontwikkelde de geneeskunde zich sterk, voornamelijk op het gebied van dissectie. Daarnaast werd de handel een belangrijk onderdeel van de Indische samenleving.

Al met al vondt er veel voortgang plaats in de Indische samenleving, op het culturele gebied maar ook op het wetenschappelijke gebied. Verbazingwekkend is het dan ook niet dat veel Indische teksten over het gebruik van het positionele stelsel uit deze periode stammen. Teksten die geschreven zijn voor deze periode gebruikten het oude, additieve stelsel, of een positioneel stelsel dat gebaseerd was op Sanskriet, en nog veel minder ontwikkeld was dan het uiteindelijke positionele stelsel dat in India ontwikkeld is. Het stelsel dat gebaseerd was op Sanskriet werd veel door astronomen gebruikt. Hierbij werden de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en 0 door woorden gerepresenteerd. Een getal werd weergegeven door deze woorden te combineren. 829 werd bijvoorbeeld genoteerd als het woord voor 8, het woord voor 2 en dan het woord voor 9. Dit systeem was positioneel en decimaal, maar niet efficiënt. Tijdens de Gupta periode werd dit stelsel verbeterd tot een compleet decimaal, positioneel en numeriek stelsel, waarmee eenvoudiger berekeningen te doen waren dan met het taalkundige stelsel. [1.15]

Rond 500 werd de nul gebruikt als plaatshouder bij astronomische berekeningen. Het boek Brahmasphuta-siddhanta van Brahmagupta uit 628 beschreef als eerste concreet positieve nummers, negatieve nummers en 0 als een apart getal. [1.29] Een aantal regels uit dit boek zijn;

- De som van twee positieve getallen is positief.
- De som van twee negatieve getallen is negatief.
- De som van nul en nul is nul. [1.28]

Vanaf de zevende eeuw n.Chr hadden de Indiërs dus al een positioneel stelsel met plaats houdende nul, maar ook hadden ze een idee van negatieve getallen en het getal 0. Deze wiskundige ontwikkelingen werden rond 800 n.Chr overgenomen door Islamitische wiskundigen. [1.29] In 825 schreef de Perzische wiskundige Khwarizmi een boek, ‘Over de berekening met Hindoe cijfers’ (Arabisch : الجمع والتفريق بالحساب الهندي). Een andere wiskundige Al-Kindi, schreef ook een boek over

het Indische stelsel; ‘Over het gebruik van de Indiase cijfers’ (Arabisch : كتاب في استعمال الأعداد الهندية).
Deze boeken zijn vooral verantwoordelijk voor de verspreiding van het Indische stelsel uit het Midden-Oosten naar Europa. In de tiende eeuw werd de Islamitische wiskunde ook uitgebreid met breuken.

De reden dat wij onze huidige cijfers Arabische cijfers noemen, is dat het Indische stelsel werd geïntroduceerd in Europa door Arabische wiskundigen. Het stelsel verspreidde zich relatief snel door Europa, en vanaf 1400 n.Chr was het Indische stelsel het algemeen geaccepteerde stelsel in Europa. [1.30]

1.10 Huidig decimaal stelsel

Het huidige decimale stelsel heeft dus een aantal ontwikkelingen doorstaan om uiteindelijk te worden zoals wij het nu kennen. Er is in dit verslag al vaak gesproken over dit stelsel, maar er is nog niet duidelijk uitgelegd hoe dit stelsels werkt. Dit is natuurlijk erg belangrijk om duidelijk te maken, omdat het het stelsel is dat in de huidige wiskunde vaak gebruikt wordt. [1.36]

1.10.1 Notatie van decimale getallen

De tekens die in het decimale stelsel gebruikt worden zijn de Arabische cijfers, oftewel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en 0. De nul dient als plaatshouder, maar is ook een los getal waarmee gerekend kan worden. Het is een positioneel stelsel dus elk getal wordt weergegeven door $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot 10^k$ met $x_k \in \mathbb{N}$

Oftewel $x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0 + x_{-1} \cdot 10^{-1} + x_{-2} \cdot 10^{-2} + \ldots + x_{-\infty} \cdot 10^{-\infty}$ met $x_k \in \mathbb{N}$

Om een getal te noteren, waarbij geldt $n < 0$, wordt een komma (,) of een punt (.) gebruikt tussen x_0 en x_{-1}. In Nederland is het gebruikelijk om een komma te gebruiken. Wanneer er dus een cijfer achter een komma staat, is dit cijfer gelijk aan $x_n \cdot 10^n$ met $n \in \mathbb{Z}$ en $n < 0$.

In 8345 komt geen komma voor. De 5 staat voor x_0, de 4 voor x_1, de 3 voor x_2 en de 8 voor x_3. Dit getal is gelijk aan $8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$.

In 83,45 komt wel een komma voor, dus de 5 staat voor x_{-2}, de 4 voor x_{-1}, de 3 voor x_0 en de 8 voor x_2. Dit getal is gelijk aan $8 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$. [1.36]

1.10.2 Decimale breuken

Een algemene notatie van breuken is $t \cdot n^{-k}$ met $t \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$ en er geldt $t \cdot n^{-k} \in \mathbb{Q}$. Breuken worden vaak geschreven als t/n, waarbij t de teller genoemd wordt en n de noemer genoemd wordt. Bij decimale breuken geldt dat de noemer een macht van 10 is. Een notatie voor decimale breuken is dus $t \cdot 10^{-k}$ met $t \in \mathbb{Z}$ en $k \in \mathbb{N}$.

Decimale breuken worden vaak genoteerd als een kommagetal. Hierbij geldt dat de k in $t \cdot 10^{-k}$ gelijk is aan het aantal cijfers achter de komma. 0,4593 kan dus ook geschreven worden als $4593 \cdot 10^{-4}$, oftewel $4593/10^4$.

Een decimaal kommagetal kan alleen als een decimale breuk geschreven worden als het getal rationeel is. Repeterende, niet-eindige decimale kommagetallen kunnen als een oneindige reeks decimale breuken geschreven worden. Een voorbeeld is ⅓, oftewel 0,3333…. Dit is ook te schrijven als $0{,}\overline{3}$. De vinculum geeft aan dat het cijfer oneindig vaak herhaald wordt. Dit getal is te schrijven als $3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + \ldots$. Een ander voorbeeld is 0,423942394239…. Dit is te schrijven als $0,\overline{4239}$. In decimale breuken is dit gelijk aan $4239 \cdot 10^{-4} + 4239 \cdot 10^{-8} + 4239 \cdot 10^{-12} + 4239 \cdot 10^{-16} + \ldots$. [1.38]

1.10.3 Metriek stelsel

Tot en met de achttiende eeuw, werden in Europa veel verschillende eenheden gebruikt om hoeveelheden aan te geven. Zo kon lengte weergegeven worden in voet, mijlen, el en nog veel meer andere eenheden. Omdat dit de communicatie van berekeningen erg lastig maakte, zocht de Franse regering aan het eind van achttiende eeuw naar een algemene manier om hoeveelheden te noteren. Dit werd het metrieke systeem, wat in 1960 de naam *Système International d'Unités* (afgekort SI). Dit systeem is gebaseerd op het decimale stelsel. Dit systeem vereenvoudigt de notatie van hoeveelheden. Er zijn namelijk bepaalde voorvoegsels die voor een eenheid kunnen worden genoteerd, zodat de hoeveelheid die bij deze eenheid met een macht van 10 wordt vermenigvuldigd. In tabel 4 zijn een aantal voorvoegsels weergegeven, en welke macht van 10 daarbij hoort. Er zijn echter nog meer voorvoegsels. [1.37]

Tabel 4: Metriek systeem

10^n	**Voorvoegsel**
10^3	Kilo
10^2	Hecto
10^1	Deca
10^0	-
10^{-1}	Deci
10^{-2}	Centi
10^{-3}	Milli

1.11 Hedendaags gebruikte getallenstelsels

Naast het decimale stelsel worden er tegenwoordig nog veel andere stelsels gebruikt. Voor computers worden bijvoorbeeld andere stelsels gebruikt; het binaire stelsel (2-tallig) en het hexadecimale stelsel (16-tallig). Het binaire stelsel wordt al langer gebruikt dan computers bestaan. Zo publiceerde Gottfried Wilhelm Leibniz in 1703 een artikel genaamd *Explication de l'Arithmétique Binaire* (verklaring van de binaire rekenkunde). [1.32]

1.11.1 Gebruik van binair stelsel bij computers

Het binaire stelsel heeft slechts twee cijfers; 0 en 1. Het is een positioneel, tweetallig stelsel. Elke cijfer geeft dus een macht van twee aan. Om een getal geschreven in een getallenstelsel binair te noteren, moet het getal eerst in machten van 2 verdeeld worden;

0 0 0 1 heeft waarde 2^0
0 0 1 0 heeft waarde 2^1
0 1 0 0 heeft waarde 2^2
1 0 0 0 heeft waarde 2^3

834 is gelijk aan 2^9 (512) + 2^8 (256) + 2^6 (64) + 2^1 (2). Dit getal zou dus binaire geschreven worden als 1101000010. [1.32]

In een computer worden gegevens doorgegeven met elektrische signalen. De kleinste eenheid van informatie op een computer is een bit, wat staat voor een cijfer in een binaire getal. Een bit kan 'aan' of 'uit' staan. Bij computers staat de 1 in een binaire getal voor aan, en de 0 voor uit. Een cijfer in een binaire getal kan dus als een soort schakelaar gezien worden. De eenheid na een bit is een nibble, wat staat voor 4 bits. De eenheid daarna is een byte, oftewel 8 bits. Deze wordt vaker gebruikt dan een bit. Een Mb (megabyte) heeft 10^6 bytes, oftewel $8 \cdot 10^6$ bits. Huidige processors kunnen maximaal 64 bits (een decimaal getal groter dan $18 \cdot 10^{18}$) verwerken. [1.31]

Het binaire stelsel wordt toegepast in elektrische schakelaars in computers bij iets genaamd logica poorten, gebaseerd op Booleaanse logica. De eenvoudigste poorten die in dit systeem voorkomen zijn AND (en), OR (of) en NOT (niet), die als uitkomst *waar* (aan, 1) of *onwaar* (uit, 0) kunnen hebben. [1.33]

NOT poort

De simpelste poort is een NOT poort. Het elektrische signaal wat de poort uitkomt (Q) is simpelweg het tegenovergestelde van wat de poort ingaat (A).

Tabel 5: NOT poort

A	Q
0	1

1	0

AND poort

Een AND poort heeft twee ingangen, A en B. Alleen wanneer beide elektrische signalen aan staan, is de uitkomst ook aan.

Tabel 6: AND poort

A	B	Q
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

OR poort

Een OR poort heeft ook twee ingangen. Hierbij hoeft echter maar 1 van de ingaande elektrische signalen aan te staan om een elektrisch signaal de poort uit te laten komen.

Tabel 7: OR poort

A	B	Q
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Er zijn nog meer mogelijke poorten, maar ze komen allemaal op hetzelfde neer; één of meerdere elektrische signalen gaan een poort in, waar een elektrisch signaal uitkomt. Wanneer een elektrisch signaal aan staat, wordt dit aangegeven met een 1 en wanneer een signaal uit staat met en 0. De reden dat hiervoor een binair stelsel gebruikt wordt, is dat deze maar twee cijfers heeft. Een elektrisch signaal kan aan of uit staan, niet iets daartussenin. Er zijn dus maar twee staten waarin een elektrische schakelaar kan voorkomen en dus zijn er maar twee cijfers nodig om deze staten aan te geven. [1.33, 1.34]

1.11.2 Gebruik van hexadecimaal stelsel bij computers

Binaire cijfers kunnen redelijk lang worden. Om de notatie te vereenvoudigen, wordt bij computers vaak een hexadecimaal stelsel gebruikt. Hierbij worden 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E en F gebruikt als cijfers. Hexadecimale getallen worden gebruikt om binaire cijfers makkelijker leesbaar te maken. Een hexadecimaal getal geeft één nibble (4 bits) weer. Een nibble kan een waarde tussen 0000 en 1111 hebben, hexadecimaal 0 tot F, want:

Een binair getal is te schrijven als $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot 2^k$ met $x_k = 0 \vee x_k = 1$.

In computers wordt x_n gedefinieerd als een bit, en vier bits als een nibble. Een nibble is dus gelijk aan $x_n \cdot 2^n + x_{n+1} \cdot 2^{n+1} + x_{n+2} + 2^{n+2} + x_{n+3} \cdot 2^{n+3}$

$(x_0 \cdot 2^0 + x_1 \cdot 2^1 + x_2 + 2^2 + x_3 \cdot 2^3) \cdot 16^0 + (x_4 \cdot 2^0 + x_5 \cdot 2^1 + x_6 + 2^2 + x_7 \cdot 2^3) \cdot 16^1 + ... + (x_{\infty-3} \cdot 2^0 + x_{\infty-2} \cdot 2^1 + x_{\infty-1} + 2^2 + x_{\infty} \cdot 2^3) \cdot 16^{\infty}$ met $x_n = 0 \vee x_1 = 1$ is een binair getal omgeschreven naar hexadecimaal.

$x_n \cdot 2^0 + x_{n+1} \cdot 2^1 + x_{n+2} + 2^2 + x_{n+3} \cdot 2^3$ kan als maximale waarde $1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 + 2^2 + 1 \cdot 2^3 = 15$ hebben, en dus is de maximale waarde van een cijfer in een hexadecimaal getal (omgeschreven van een binair getal) 15 zijn.

Om een binair getal om te schrijven naar een hexadecimaal getal, is het handig om het eerst in nibbles te verdelen;

100111100011 = 1001 1110 0011 =

$1 \cdot 2^{11} + 0 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2\ 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$

$(1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2\ 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 16^2 + (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2\ 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 16^1 + (0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2\ 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 16^0 =$

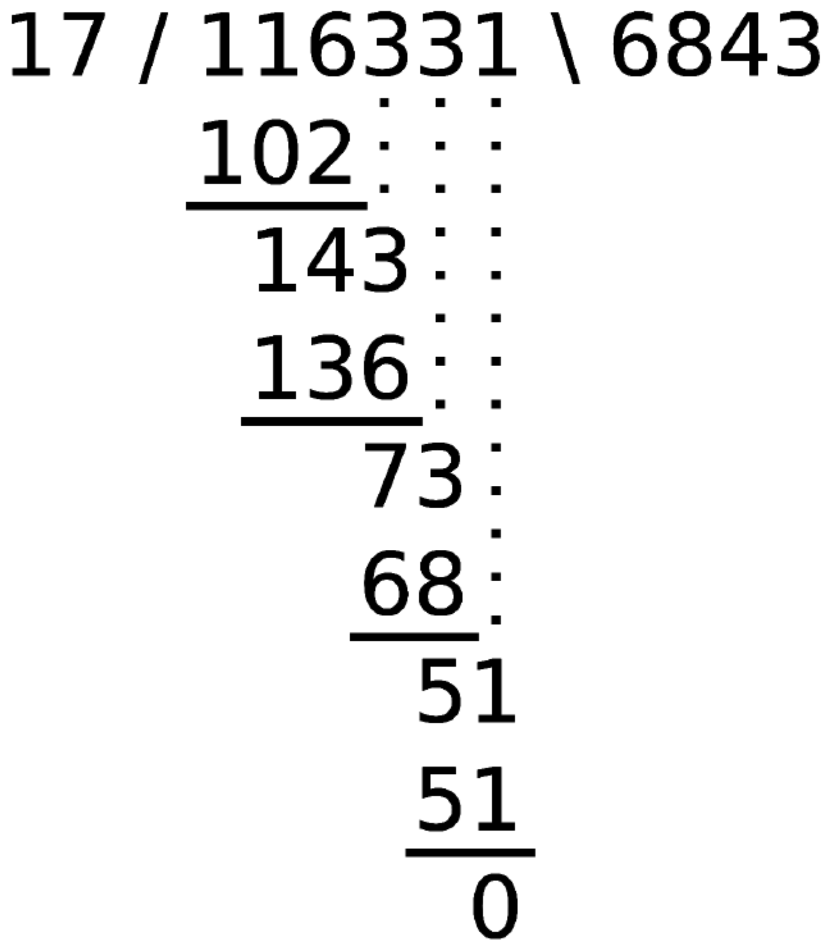
$9 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0$

Dit getal is dus hexadecimaal te schrijven als 9E3

Hexadecimale getallen worden in een computer niet op dezelfde manier gebruikt als binaire cijfers, ze worden alleen gebruikt om binaire getallen begrijpbaar te maken. [1.35]

Hoofdstuk 2

De werking van verschillende getallenstelsels

[28] 

Het Romeinse stelsel is een erg bijzonder stelsel. Over het algemeen maakt de plaats van de tekens niets uit, maar er is wel een belangrijke uitzondering; VI is niet hetzelfde getal als IV. Het romeinse stelsel is één van de vele stelsels die hebben bestaan in onze geschiedenis, die elk hun eigen bijzondere kenmerken hebben, maar hoe werken al die getallenstelsels?

---

[28] *Een staartdeling waarbij 116331 wordt gedeeld door 17*. (2010, 21 mei). [Illustratie]. Wikipedia. https://nl.wikipedia.org/wiki/Staartdeling

2.1 Introductie

In het vorige hoofdstuk is de ontwikkeling beschreven van verschillende getallenstelsels. Hierbij werd aangegeven waarom samenlevingen voor bepaalde getallenstelsels kozen, wat opmerkzame kenmerken van de getallenstelsels is en de algemene werking van de getallenstelsels. In dit hoofdstuk zal de werking uitgebreider besproken worden.

Eerst worden een aantal type getallenstelsels beschreven. Hierbij wordt aangegeven welke cijfers er in elk stelsel zijn en hoe hoeveelheden die niet gelijk zijn aan één van de cijfers kunnen worden opgeschreven. Er zijn echter meer soorten getallenstelsels dan degene die in dit verslag genoemd worden, maar deze kunnen niet allemaal in dit verslag besproken worden. Er is ervoor gekozen om alleen de stelsel te bespreken die in onze geschiedenis veel zijn gebruikt.

Daarna worden regels voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen in twee type stelsels opgesteld. Er is voor gekozen om dit voor maar twee van de soorten getallenstelsels te doen, omdat het te veel tijd kost om het voor elk type stelsel te doen.

Voor type P2 stelsels, waarbij ons decimale stelsel hoort, zal er worden beschreven hoe breuken als kommagetal geschreven kunnen worden. Ook wordt er een methode gegeven waarmee type P2 getallen kunnen worden omgeschreven naar getallen met een ander grondtal.

Bij elk van de rekenregels wordt een voorbeeld gegeven. Dit zijn de enige berekeningen die gedaan worden in dit hoofdstuk. In dit hoofdstuk wordt uitsluitend de werking van getallenstelsels besproken.

Dit hoofdstuk is erg belangrijk voor de rest van het verslag omdat het noodzakelijk is om te weten welke stelsels er zijn om te kunnen bepalen welk stelsel ideaal is. Ook kunnen de rekenregels in de rest van het verslag worden gebruikt.

2.2 Soorten getallenstelsels

In het vorige hoofdstuk zijn al kort de eigenschappen van additieve en positionele stelsels besproken. In dit hoofdstuk wordt met meer diepgang uitgelegd welke systemen er zijn, en hoe deze werken. Ook zal worden besproken welke stelsels uit hoofdstuk 1 bij een bepaald type stelsel horen. Er zijn drie soorten stelsels, die onderling weer verdeeld kunnen worden in subcategorieën:

- Additieve stelsels, die gebaseerd zijn op de prehistorische manier van tellen. Additieve stelsels zijn gebaseerd op het principe van optellen.

- Hybride stelsels, die een combinatie van een additief systeem en vermenigvuldigen gebruiken om getallen uit te drukken.

- Positionele stelsels, waarbij de positie van cijfers in een getal de waarde van het cijfer bepaalt. [1.15]

2.3 Additieve getallenstelsels

De waarde van een additief getal wordt bepaald door de delen waaruit het getal bestaat bij elkaar op te tellen, en soms ook door ze van elkaar af te trekken. De positie van een teken in een getal speelt geen rol bij de waarde van dit getal (met enige uitzonderingen). Er zijn 3 subcategorieën waarin deze stelsels verdeeld kunnen worden.

De algemene regel is additieve stelsels is dat de waarde van een getal kan worden bepaald door

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, waarbij x_n een onderdeel van het getal is.

Er zijn ook uitzonderingen op deze regel, zoals bij het Romeinse stelsel. Hierbij geldt dat de waarde van sommige tekens gelijk is aan het rechter teken min het linker teken. Het is echter bekend wanneer dit soort regels gelden en dus hoeft hier geen rekening mee gehouden te worden wanneer niet aangegeven is dat er andere regels gelden dan de algemene regels van een stelsel. [1.15]

2.3.1 Type A1 (additief type 1)

Bij dit type stelsel zijn er speciale tekens voor:

a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, …, a^k

a is hierbij het grondgetal van het stelsel. Er geldt a $\in \mathbb{N}$.

In tabel 9 staat weergegeven hoe hoeveelheden worden weergegeven wanneer a^n meerdere keren in een getal voorkomt. [1.15]

Tabel 9: Hoeveelheden in type A1 stelsel

	1 keer	2 keer	3 keer	4 keer	…	a keer
Orde nummer n	a^n	$a^n + a^n$	$a^n + a^n + a^n$	$a^n + a^n + a^{n.} + a^n$	…	a^{n+1}

Egyptenaren

Een voorbeeld van een dergelijk stelsel, is dat van de Egyptenaren. Het grondgetal van dit stelsel was 10.

Tabel 10: Egyptische hiërogliefen

Notatie	Waarde	Hiëroglief
a^0	10^0	
a^1	10^1	
a^2	10^2	
a^3	10^3	
a^4	10^4	
a^5	10^5	
a^6	10^6	

2.3.2 Type A2

Bij dit type stelsel zijn er speciale tekens voor:

a^0, b, a^1, $b \cdot a^1$, a^2, $b \cdot a^2$, a^3, $b \cdot a^3$, …, a^k, $b \cdot a^k$

a is hierbij het grondgetal van het stelsel en b is een constante. Er geldt $a \in \mathbb{N}$ en $b \in \mathbb{N}$.

In tabel 11 staat hoe getallen waarin a^n meer dan 1 keer voorkomt worden weergegeven ($b > 2$).

Tabel 11: Hoeveelheden in type A2 stelsel

	1 keer	2 keer	…	b keer	b + 1 keer
Orde nummer n	a^n	$a^n + a^n$	…	b	$b + a^n$

[1.15]

Grieks Attisch stelsel en Romeins stelsel

Het Griekse Attische stelsel en het Romeinse stelsel behoren beide tot de tweede soort additieve stelsels. Het grondtal (a) van beide stelsels is 10 en de constante b van beide stelsels is 5.

Tabel 12: Arabische, Griekse en Romeinse cijfers

Notatie	Arabische notatie	Griekse notatie	Romeinse notatie
a^0	10^0	Ι	I
b	5	𐅃	V
a^1	10^1	Δ	X
$b \cdot a^1$	$5 \cdot 10^1$	𐅄	L
a^2	10^2	Η	C
$b \cdot a^2$	$5 \cdot 10^2$	𐅅	D
a^3	10^3	Χ	M
$b \cdot a^3$	$5 \cdot 10^3$	𐅆	
a^4	10^4	Μ	
$b \cdot a^4$	$5 \cdot 10^4$	𐅇	

2.3.3 Type A3

Bij dit type stelsel zijn er speciale tekens voor:

$a^n, 2 \cdot a^n, 3 \cdot a^n, \ldots, (a - 1) \cdot a^n$

a is hierbij het grondgetal. Er geldt $a, n \in \mathbb{Z}$.

In tabel 13 zijn de cijfers weergegeven die in een dergelijk stelsel voorkomen.
In deze tabel staat in de linkerkolom de b in $b \cdot a^n$ en in de bovenste rij staat de n in $b \cdot a^n$. a is het grondgetal.

Tabel 13: Cijfers in type A3 stelsel

	0	1	2	…	∞
1	$1 \cdot a^0$	$1 \cdot a^1$	$1 \cdot a^2$	…	$1 \cdot a^\infty$
2	$2 \cdot a^0$	$2 \cdot a^1$	$2 \cdot a^2$	…	$2 \cdot a^\infty$
3	$3 \cdot a^0$	$3 \cdot a^1$	$3 \cdot a^2$	…	$3 \cdot a^\infty$
…	…	…	…	…	…
(a - 1)	$(a - 1) \cdot a^0$	$(a - 1) \cdot a^1$	$(a - 1) \cdot a^2$	…	$(a - 1) \cdot a^\infty$

[1.15]

Ionisch stelsel en Brahmi cijfers

Voorbeelden van type A3 stelsels zijn het Indische stelsel dat tussen 300 v.Chr en 700 n.Chr werd gebruikt (Brahmi cijfers) en het Ionische stelsel van de Grieken. De cijfers uit het Ionische stelsel zijn in tabel 14 weergegeven. In deze tabel staan in de linkerkolom de b in $b \cdot 10^n$ en in de bovenste rij staat de n in $b \cdot 10^n$. Bij het stelsel van de Grieken geldt $1 \leq b \leq 9$ en $0 \leq n \leq 2$. Andere cijfers werden niet gebruikt.

Tabel 14: Waardes van de Ionische cijfers

	0	1	2
1	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^1$	$1 \cdot 10^2$
2	$2 \cdot 10^0$	$2 \cdot 10^1$	$2 \cdot 10^2$
3	$3 \cdot 10^0$	$3 \cdot 10^1$	$3 \cdot 10^2$
…	…	…	…
9	$9 \cdot 10^0$	$9 \cdot 10^1$	$9 \cdot 10^2$

De Brahmi cijfers hadden soortgelijke waarden, er werden alleen niet precies dezelfde waarden voor b en n gebruikt in $b \cdot 10^n$. [1.15]

2.4 Hybride stelsels

Hybride stelsels zijn additief. Hoeveelheden worden echter weergegeven door middel van vermenigvuldigen, niet alleen door optellen. Daarom worden ze niet meer meegerekend met de additieve stelsels. Positioneel zijn de hybride stelsels echter ook niet. Er zijn vier soorten hybride stelsels. [1.15]

2.4.1 Type H1 (hybride type 1)

Bij dit type stelsel zijn er speciale tekens voor:

$a^0, a^1, a^2, \ldots, a^k$ met $a \in \mathbb{N}$

In tabel 15 staat weergegeven hoe hoeveelheden in een dergelijk stelsel worden weergegeven. In de eerste rij staat weergegeven hoe vaak a^n voorkomt in een getal.

Tabel 15: Hoeveelheden in type H1 stelsel

	1	2	3	…
a^0	a^0	$a^0 + a^0$	$a^0 + a^0 + a^0$	…
a^1	a^1	$a^1 + a^1$	$a^1 + a^1 + a^1$	…
a^n met $n \geq 2$ en $n \in \mathbb{N}$	a^n	$(1 + 1) \cdot a^n$	$(1 + 1 + 1) \cdot a^n$	…

Bij dit stelsel is er al sprake van vermenigvuldigen van machten van het grondgetal, maar er is ook nog sprake van een additief systeem. [1.15]

2.4.2 Type H2

Bij dit type stelsel zijn er speciale tekens voor:

$a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots, a^k$ met $a \in \mathbb{N}$

a^2 is het grondgetal van een dergelijk stelsel, a is de wortel van het grondgetal. De tekens die bij dit stelsel gebruikt worden, zijn gelijk aan de tekens die bij type H1 gebruikt worden. De notatie van hoeveelheden is echter anders.

Hoeveelheden zouden bij dit stelsel dus worden genoteerd zoals in tabel 16 is weergegeven. In de eerste rij van de tabel staat hoe vaak a^n voorkomt in het getal.

Tabel 16: Hoeveelheden in type H2 stelsel

1	2	3	…
a^0	$a^0 + a^0$	$a^0 + a^0 + a^0$	…
a^1	$a^1 + a^1$	$a^1 + a^1 + a^1$	…
$1 \cdot a^n$ met $n \geq 2$ en $n \in \mathbb{N}$	$(1 + 1) \cdot a^n$	$(1 + 1 + 1) \cdot a^n$	…
$a \cdot a^n$ met $n \geq 2$ en $n \in \mathbb{N}$	$(a + a) \cdot a^n$	$(a + a + a) \cdot a^n$	…

Vanaf a^2 is er sprake van vermenigvuldiging om een hoeveelheid weer te geven. Er is echter ook sprake van een additief systeem. Daarom is dit stelsel een hybride stelsel. Bij dit type stelsel kunnen getallen op meerdere manieren genoteerd worden. Wanneer a gelijk is aan 10, kan $(10 + 10 + 10) \cdot 10^n$ ook geschreven worden als $(1 + 1 + 1) \cdot 10^{n+1}$. De regel dat cijfers als $(a + a + \ldots + a) \cdot a^n$ geschreven kunnen worden, is vooral handig wanneer een getal genoteerd moet worden dat groter is dan het grootste cijfer in het stelsel. Wanneer bijvoorbeeld 10^k het grootste cijfer is in dit stelsel en er $30 \cdot 10^k$ genoteerd moet worden, kan dit niet genoteerd worden als $(1 + 1 + 1) \cdot 10^{k+1}$, want er is geen cijfer voor 10^{k+1}. Dit getal zou dus als $(1 + 1 + 1 + \ldots + 1) \cdot 10^k$ geschreven moeten worden, waarbij er 30 keer een 1 in $(1 + 1 + 1 + \ldots + 1)$ voorkomt (dit is overigens de notatiewijze in een type H1 stelsel). Een eenvoudigere notatie is $(10 + 10 + 10) \cdot 10^k$.

In een stelsel met het grondgetal 100, zouden hoeveelheden dus worden weergegeven zoals in tabel 17 is weergegeven. In de eerste rij van de tabel staat hoe vaak a^n in het getal voorkomt. [1.15]

Tabel 17: Hoeveelheden in type H2 stelsel met grondtal 100

1	2	3	…
10^0	$10^0 + 10^0$	$10^0 + 10^0 + 10^0$	…
10^1	$10^1 + 10^1$	$10^1 + 10^1 + 10^1$	…
$1 \cdot 10^2$	$(1 + 1) \cdot 10^2$	$(1 + 1 + 1) \cdot 10^2$	…
$10 \cdot 10^2$	$(10 + 10) \cdot 10^2$	$(10 + 10 + 10) \cdot 10^2$	…
$1 \cdot 10^3$	$(1 + 1) \cdot 10^3$	$(1 + 1 + 1) \cdot 10^3$	…
$10 \cdot 10^3$	$(10 + 10) \cdot 10^3$	$(10 + 10 + 10) \cdot 10^3$	…
…	…	…	…
$10 \cdot 10^\infty$	$(10 + 10) \cdot 10^\infty$	$(10 + 10 + 10) \cdot 10^\infty$	…

Geen van de stelsels besproken in hoofdstuk 1 gebruikt dit systeem. Wel werd dit systeem gebruikt door de Mari, een Russisch volk. Het grondgetal dat zij gebruikten was 100, en dus zijn de cijfers die zij gebruikten gelijk aan de cijfers in de tabel hierboven. [1.15]

2.4.3 Type H3

Bij dit type stelsel zijn er speciale tekens voor:

1, 2, 3, …, (a - 1)
a, $2 \cdot a$, $3 \cdot a$, …, $(a - 1) \cdot a$
a^2, a^3, … a^k

Met a, k $\in \mathbb{N}$. a is het grondgetal van het stelsel.
In tabel 18 staat een overzichtelijke notatie van de cijfers.

Tabel 18: Cijfers in een type H3 stelsel

1	2	3	…	(a - 1)
a	$2 \cdot a$	$3 \cdot a$	…	$(a - 1) \cdot a$
a^2				
a^3				
…				
a^∞				

Er zijn geen speciale tekens voor $b \cdot a^n$, met $n \geq 2$. Deze worden verkregen door a^n met een cijfer tussen 1 en (a - 1) te vermenigvuldigen, wat doet denken aan een positioneel stelsel.

In tabel 19 staat hoe hoeveelheden worden weergegeven.

Tabel 19: Hoeveelheden in een type H3 stelsel

1	2	3	…	(a - 1)
a	$2 \cdot a$	$3 \cdot a$	…	$(a - 1) \cdot a$
a^2	$2 \cdot a^2$	$3 \cdot a^2$	…	$(a - 1) \cdot a^2$
a^3	$2 \cdot a^3$	$3 \cdot a^3$	…	$(a - 1) \cdot a^3$
…	…	…	…	…
a^∞	$2 \cdot a^\infty$	$3 \cdot a^\infty$	…	$(a - 1) \cdot a^\infty$

Dit type lijkt erg op type A3. Het verschil zit hem echter in het feit dat een type A3 stelsel wel speciale tekens heeft voor $b \cdot a^n$, met $n \geq 2$. Bij type A3 is er dus geen sprake van vermenigvuldigen. Geen van de stelsels die besproken zijn in hoofdstuk 1 behoort tot type H2. [1.15]

2.4.4 Type H4

Bij dit type stelsel zijn er speciale tekens voor:

1, 2, 3, …, (a - 1)
a^1, a^2, a^3, … a^k

Met a ∈ ℕ en a is het grondgetal van het stelsel.

In tabel 20 staat hoe hoeveelheden in een type H4 stelsel worden weergegeven.

Tabel 20: Hoeveelheden in een type H4 stelsel

$1 \cdot a^n$	$2 \cdot a^n$	$3 \cdot a^n$	…	$(a - 1) \cdot a^n$

Hierbij geldt n ∈ ℕ.

Dit type stelsel lijkt erg op type H3 stelsels. Bij type H3 zijn er echter ook speciale tekens voor; a, 2 · a, 3 · a, …, (a - 1) · a. Deze hoeveelheden worden bij type H4 verkregen door middel van vermenigvuldigen. [1.15]

Chinezen

Het stelsel van de Chinezen dat in hoofdstuk 1 is besproken behoort tot type H4 (het normale stelsel, niet dat van de Chinese geleerden). Het grondgetal van hun stelsel is 10. Zij hebben speciale tekens voor 1 tot en met 9 en 10^1, 10^2, 10^3 en 10^4. In tabel 21 staat hoe de Chinezen hoeveelheden noteerden.

Tabel 21: Chinese notatie voor hoeveelheden

1	2	3	…	9
$1 \cdot 10^1$	$2 \cdot 10^1$	$3 \cdot 10^1$	…	$9 \cdot 10^1$
$1 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^2$	…	$9 \cdot 10^2$
$1 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	…	$9 \cdot 10^3$
$1 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^4$	…	$9 \cdot 10^4$

Daarnaast werd dit type stelsel gebruikt om de getallen bij de lange telling van de Mayakalender te noteren. [1.15]

2.5 Positionele stelsels

In hoofdstuk 1 zijn vier positionele getallenstelsels besproken; die van de Babyloniërs, die van de Maya's, die van de Chinezen en het stelsel van de Indiërs dat wij tegenwoordig gebruiken. Positionele stelsels zijn te verdelen in twee subcategorieën. Deze verschillen alleen in de samenstelling van de gebruikte cijfers.

Een algemeen kenmerk van positionele stelsels is dat een getal kan worden weergegeven als
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot a^n$ met x $\in \mathbb{Z}$, a $\in \mathbb{N}$ en a $\geq$ 2. a is hierbij het grondgetal van het stelsel.

Wanneer geldt $x_n \cdot a^n \geq a^{n+1}$ wordt de hoeveelheid keren dat a^{n+1} in $x_n \cdot a^n$ past bij x_{n+1} opgeteld.
In een zestigtallig stelsel wordt bijvoorbeeld niet $45 \cdot 60^1 + 67 \cdot 60^0$ genoteerd, maar $46 \cdot 60^1 +$
$07 \cdot 60^0$. [1.15]

2.5.1 Type P1 (positioneel type 1)

Bij dit type stelsel zijn er cijfers voor 1 en c, met c $\in \mathbb{N}$. Het grondtal van een type P1 stelsel is a met a $\in \mathbb{N}$. Voor c geldt dat a een geheel veelvoud is van c.

De cijfers tot en met (a - 1) worden genoteerd zoals in tabel 22 is weergegeven.

Tabel 22: Waarde van cijfers in een type P1 stelsel

1	1 + 1	1 + 1 + 1	…	c - 1	c	c + 1	…	a - 1

Elk van de positionele stelsels in hoofdstuk 1 behoren tot type P1, behalve het stelsel van de Indiërs. [1.15]

Babylonisch stelsel

Bij het Babylonische stelsel geldt c = 10 en het grondtal is 60. Het teken met waarde 1 is en het teken met waarde 10 is .

In tabel 23 is weergegeven hoe de Babylonische cijfers eruit zagen.

Tabel 23: Babylonische cijfers.

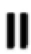
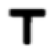
Decimale notatie	1	1 + 1	1 + 1 + 1	…	1 + 1 +1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	10	10 + 1	…
Babylonische notatie				…				…

Stelsel van de Chinese geleerden

Het grondtal van dit stelsel is 10 en c = 5. Het teken met waarde 1 is een verticale streep en het teken met waarde 5 is een verticale streep. Een uitzondering bij dit stelsel is dat c (5) niet als een verticale streep genoteerd wordt (het teken van c), het wordt met 5 verticale strepen genoteerd. Pas vanaf 6 wordt de horizontale streep toegepast om een hoeveelheid van 5 te representeren.

In tabel 24 is weergegeven hoe de cijfers van de chinezen eruit zagen.

Tabel 24: Chinese cijfers

Decimale notatie	1	1 + 1	1 + 1 + 1	1 + 1 + 1 + 1	5	5 + 1	…
Chinese notatie							…

Stelsel van de Mayaanse priesters

Het grondtal van dit stelsel is 20 en c = 5. Het teken met waarde 1 was een stip en het teken met waarde 5 was een horizontale streep.

De Mayaanse cijfers zijn in tabel 25 weergegeven.

Tabel 25: Mayaanse cijfers.

Decimale notatie	1	1 + 1	…	5	5 + 1	…	5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1
Mayaanse notatie			…			…	

Bij elk van deze stelsels werden deze tekens toegepast als x in $x_\infty \cdot a^\infty + \ldots + x_3 \cdot a^3 + x_2 \cdot a^2 + x_1 \cdot a^1 + x_0 \cdot a^0$. [1.15]

2.5.2 Type P2

Een type P2 stelsel moet aan 3 eisen voldoen:

- Het stelsel moet een positioneel systeem gebruiken. Een getal moet dus als $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot a^n$ met $x \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}$ en $a \geq 2$ geschreven kunnen worden. a is hierbij het grondgetal van het stelsel.
- De tekens bij stelsel type P2 zijn niet additief samengesteld. Er kan wel een betekenis achter de gebruikte tekens zitten, maar het is een eis dat de tekens niet additief zijn samengesteld zoals bij type P1.
- Er moet een 0 aanwezig zijn, die de rol van plaatshouder op zich neemt, maar ook als apart getal functioneert.

Dit soort stelsels worden ook wel n-tallige stelsels genoemd, waarbij n staat voor het grondtal. Het stelsel dat wij tegenwoordig gebruiken, met de Arabische cijfers, is een voorbeeld van een type P2 stelsel. Ook het binaire stelsel en het hexadecimale stelsel die bij computers worden gebruikt zijn voorbeelden van een type P2 stelsels. [2.7]

Nul

Een opmerkzaam kenmerk van type P2 stelsels, is dat alle x_n waarvoor geldt $n \geq k$ worden vermenigvuldigt met a als er op de plek van x_k een nul wordt gezet. Hiervoor moet $k \geq 0$ gelden en a is hierbij het grondtal. Wanneer bijvoorbeeld bij 639 (decimaal) een nul op de plek van x_0 wordt geplaatst, staat er 6390, oftewel $639 \cdot 10$. x_n wordt verplaatst naar de plek van x_{n+1}. Wanneer op de plek van x_2 een nul wordt geplaatst, worden alleen alle cijfers waarvoor bij de n in x_n geldt $n > 2$ vermenigvuldigd met 10; 639 → 6039, alleen x_2, de 6, is vermenigvuldigd met 10.

Tegenovergesteld worden alle x_n waarvoor geldt $k \leq n$ gedeeld door a wanneer er op de plek van x_k een nul wordt gezet, en er geldt $k \leq -1$. Wanneer er bijvoorbeeld op de plek van x_{-1} in 0,639 (decimaal) een nul wordt gezet, staat er 0,0639; alle waarden van x_n waarvoor geldt $n < -1$ zijn door 10 gedeeld.

Gebruikte cijfers

De verzameling van cijfers in een getallenstelsel is eindig. Voor een cijfer x geldt $0 \leq x < a$, waarbij a het grondtal van het stelsel is. Het decimale stelsel gebruikt de Arabische cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en 0. Er kunnen echter ook andere cijfers gebruikt worden bij type P2 stelsels. Wanneer een P2 stelsel een grondtal heeft dat kleiner is dan 10, is het gebruikelijk om in dit stelsel de Arabische cijfers te gebruiken. Wanneer een type P2 stelsel een grondtal groter dan 10 heeft, is het gebruikelijk om de Arabische cijfers te gebruiken, en hier extra cijfers aan toe te voegen. Een voorbeeld is het hexagesimale stelsel waarin naast de Arabische cijfers ook de cijfers A, B, C, D, E, F gebruikt worden.

In elk positioneel getallenstelsel, zijn er 10 cijfers, maar 10 betekent in elk getallenstelsel iets anders. Als er wordt gekeken naar een positioneel getallenstelsel met 4 (decimaal) cijfers, dan zijn de waarden daarvan gelijk aan de Arabische cijfers 0, 1, 2 en 3. Dit zijn in totaal 10 cijfers want er zijn 3 cijfers; 1, 2 en 3 + het cijfer 0, dus dat zijn 3 + 1 = 10. In de rest van dit verslag wordt ervan uitgegaan dat de

Arabische cijfers gebruikt worden en het aantal cijfers in elk positioneel getallenstelsel 10 is, wanneer het type P2 stelsel wordt besproken.

Wanneer er Arabische cijfers worden gebruikt, en het niet uit de context af te leiden is, kan rechts van het getal het grondtal gezet worden. 200_{10} betekent bijvoorbeeld dat dit getal decimaal is. 200_8 is juist een octaal getal. [2.7]

Transcriptie

Wanneer er met een getallenstelsel gerekend wordt dat een relatief groot grondtal heeft, bijvoorbeeld 30, kan het erg verwarrend zijn wanneer er 30 verschillende tekens zijn voor alle cijfers. Getallen kunnen ook getranscribeerd worden om berekeningen makkelijker te kunnen begrijpen.
De gebruikelijke notatie voor een dergelijke transcriptie is als volgt: $x_\infty,\ldots,x_3,x_2,x_1,x_0$.
Dit betekent $x_\infty \cdot a^\infty,\ldots,x_3 \cdot a^3,x_2 \cdot a^2,x_1 \cdot a^1,x_0 \cdot a^0$ waarin a staat voor het grondtal van het stelsel waarin het getranscribeerde staat. Hierbij geldt $x_n < a$.

Een voorbeeld van een getal in transcriptie is 20,29,02 in een 30-tallig stelsel. Dit is decimaal gelijk aan $20 \cdot 30^2 + 29 \cdot 30^1 + 02 \cdot 30^0 = 18.061$. Zoals misschien opvalt staat er 20,29,02 en niet 20,29,2. Dit zorgt ervoor dat verwarring over de betekenis van de waarde van het getal voorkomen wordt, omdat 20,29,2 ook als 20,29,20 kan worden gelezen, wat niet gelijk is aan 20,29,02.

Bij transcriptie kan x_k dus meer dan 1 cijfer hebben, die samen voor 1 cijfer staan. Het grondtal kan, zoals hierboven besproken is, ook bij getallen die in transcriptie staan rechts van het getal geplaatst worden, bijvoorbeeld $20,29,02_{30}$. [2.7]

Kommagetallen en breuken

In het eerste hoofdstuk werden decimale breuken besproken. De regels die hierbij besproken werden gelden echter niet alleen in het decimale stelsel, maar bij elk n-tallig type P2 stelsel. In het eerste hoofdstuk werd aangegeven dat een algemene notatie voor breuken $t \cdot n^{-k}$ is, met $t \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$ en er geldt $t \cdot n^{-k} \in \mathbb{Q}$. Breuken worden vaak geschreven als t/n, waarbij t de teller genoemd wordt en n de noemer. Bij n-tallige breuken geldt dat de noemer een macht van het grondtal is. Een n-tallige breuk is dus te schrijven als t/a^k, waarbij a het grondtal is.

n-tallige breuken worden vaak genoteerd als een kommagetal. Bij een n-tallige breuk is het aantal cijfers achter de komma gelijk aan de k in t/a^k. De notatie voor de n-tallige breuk bij het kommagetal $0,x_{-1}x_{-2}x_{-3}\ldots x_{-k}$ (oftewel $0 \cdot a^0 + x_{-1} \cdot a^{-1} + x_{-2} \cdot a^{-2} + x_{-3} \cdot a^{-3} + \ldots + x_{-k} \cdot a^{-k}$, met $k \in \mathbb{N}$ en a als grondtal) is dus $(x_{-1}x_{-2}x_{-3}\ldots x_{-k})/a^k$. Om een kommagetal als n-talige breuk te schrijven, moet het kommagetal wel eindig of repeterend zijn.

Niet-eindige, repeterende kommagetallen kunnen in elk n-tallig stelsel als een oneindige reeks breuken geschreven worden. De repeterende reeks cijfers $x_a\ldots x_b$ kan met een vinculum erboven geschreven worden; $\overline{xa\ldots xb}$, wat aangeeft dat de reeks zich steeds herhaald. Wanneer deze reeks in een kommagetal voorkomt, kan dit ook geschreven worden als $(x_a\ldots x_b)/a^p + (x_a\ldots x_b)/a^{2p} + \ldots +$

$(x_a \ldots x_b)/a^{\infty p}$, waarbij p gelijk is aan het aantal cijfers in de reeks $x_a \ldots x_b$, er geldt $p \in \mathbb{N}$ a het grondtal is.

Het repeterende kommagetal $0{,}3423334233_5\ldots$, kan bijvoorbeeld geschreven worden als $0,\overline{34233}_5$. Dit getal is geschreven in een vijf-tallig stelsel, en is als een oneindige reeks 5-tallige breuken te schrijven als $34233/5^5 + 34233/5^{10} + 34233/5^{15} + \ldots + 34233/5^{\infty 5}$. [2.2]

2.6 Algemene rekenregels voor type A1 stelsel

Het is niet realistisch dat in dit verslag voor elk type getallenstelsel rekenregels worden opgesteld. Daarom wordt er voor twee veel gebruikte soorten rekenregels opgesteld; type A1 en type P2. Type A1 is het meest eenvoudige type additieve stelsel. Type P2 is tegenwoordig het meest gebruikte stelsel. In dit gedeelte worden rekenregels besproken die werken in stelsel type A1. Hierbij zijn speciale tekens voor a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, …, a^n, waarbij a het grondtal van het stelsel is.

2.6.1 Optellen

Het getal x staat voor $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_\infty$ met $x_k \in \mathbb{N}$ en z staat voor $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_\infty$ met $z_k \in \mathbb{N}$.

x bij z optellen geeft $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_\infty) + (z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_\infty) = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_\infty + z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_\infty$

Om 2 getallen bij elkaar op te tellen, worden dus simpelweg alle tekens bij elkaar in een nieuw getal gedaan, wat de waarde heeft van x + z.

Wanneer geldt $x_q + \ldots + x_p + z_m + \ldots + z_n = a^k$, met q, p, m, n $\in \mathbb{N}$, a als grondtal en k $\in \mathbb{Z}$ dan wordt $x_q + \ldots + x_p + z_m + \ldots + z_n$ als a^k geschreven.

2.6.2 Aftrekken

Dit werkt soortgelijk als optellen. Neem x - z, waarbij x > z.

Het getal x staat voor $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_\infty$ met $x_k \in \mathbb{N}$ en z staat voor $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_\infty$ met $z_k \in \mathbb{N}$.

z van x aftrekken geeft $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_\infty) - (z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_\infty) = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_\infty - z_1 - z_2 - z_3 - \ldots - z_\infty$

Werkwijze

Om x - z uit te rekenen, wordt elke z_k stap voor stap van $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_\infty$ afgetrokken.

Er geldt $z_k = a^n$, want de tekens in dit stelsel zijn a^1, a^2, a^3, a^4, …, a^k

Wanneer er een x_k in x aanwezig is die gelijk is aan a^n, wordt deze uit het getal x gehaald. Er heeft dan dus $x_k - z_k = 0$ plaatsgevonden.

Wanneer er geen x_k in x aanwezig is die gelijk is aan a^n, wordt een x_k die gelijk is aan a^{n+1} omgeschreven naar $a^n + \ldots + a^n$, waarin a keer a^n voorkomt. Nu is wel een x_k aanwezig die gelijk is aan a^n, en dus aan z_k, en kan er $x_k - z_k$ plaatsvinden.
a^{n+1} mag geschreven worden als $a^n + \ldots + a^n$, waarin a keer a^n voorkomt, omdat a^{n+1} te schrijven is als $a \cdot a^n$. De notatie hiervoor is stelsel type A1 is $a^n + \ldots + a^n$, met a keer a^n.

2.6.3 Vermenigvuldigen

Om additieve getallen te vermenigvuldigen kan de Egyptische methode gebruikt worden. Hierbij wordt één van de getallen eerst omgeschreven naar zijn binaire variant. [2.6]

Een getal z met x vermenigvuldigen, betekent dat z, x keer bij zichzelf wordt opgeteld.

Om dus z en x met elkaar te vermenigvuldigen, kan z x keer worden opgeschreven en daarna op de eerder beschreven manier kan dit bij elkaar opgeteld worden. Dit kan echter veel werk zijn. Er zijn ook makkelijker manieren. Zo werd in de Egyptische wiskunde een manier van vermenigvuldigen gebruikt, waarbij het te vermenigvuldigen getal eerst omgeschreven werd. Deze methode werd in het Rhind papyrus beschreven, wat één van de bekendste artefacten van de Egyptische wiskunde is.

Neem de som $x \cdot z$. Er wordt een tabel gemaakt. In de linkerkolom worden alle machten van 2 gezet, waarvoor geldt $2^n \geq 1$, beginnend bij 2^0. In de rechterkolom worden $z \cdot 2^n$ gezet. Dit kan berekend worden door het getal in de rechterkolom steeds bij zichzelf op te tellen, oftewel, door dit getal met 2 te vermenigvuldigen.

Dit mag omdat elke kolom telkens met 2 vermenigvuldigd wordt:

2^n	z
$2^{n+1} = 2^n \cdot 2$	$z \cdot 2$

In tabel 26 staan de machten van 2 en $z \cdot 2^n$ weergegeven

2^0	z
2^1	$z \cdot 2$
2^2	$z \cdot 2^2$
2^3	$z \cdot 2^3$
…	…
2^n	$z \cdot 2^n$

Tabel 26: Machten van 2 en $z \cdot 2^n$

Bij deze tabel geldt $2^n \leq x$.

De volgende stap is om te kijken welke getallen in de linkerkolom samen uitkomen op x, waarbij zo vaak mogelijk het grootst mogelijke getal gekozen wordt. Als deze getallen bij elkaar worden opgeteld, is de uitkomst dus gelijk aan x. Als de getallen in de rechterkolom die bij de getallen in de linkerkolom horen bij elkaar worden opgeteld, is de uitkomst gelijk aan x · z.

Wat er dus eigenlijk gedaan wordt, is dat het getal z eerst in meerdere machten van 2 wordt opgeschreven. Daarna wordt gekeken welke machten van 2 samen gelijk zijn aan x. Deze machten van 2 waren al met z vermenigvuldigt en deze vermenigvuldigingen worden nu bij elkaar opgeteld. [2.1]

Bewijs

Bij de som x · z, kan x binair geschreven worden; $x = x_0 \cdot 2^0 + x_1 + 2^1 + \ldots + x_\infty \cdot 2^\infty$

Hierbij geldt $x_k = 0 \lor x_k = 1$

$x \cdot z$ is dus gelijk aan $z \cdot (x_0 \cdot 2^0 + x_1 + 2^1 + \ldots + x_\infty \cdot 2^\infty)$
$= z \cdot (x_0 \cdot 2^0) + z \cdot (x_1 + 2^1) + \ldots + z \cdot (x_\infty \cdot 2^\infty)$

In de linkerkolom worden de machten van 2 zo gekozen dat $x = x_0 \cdot 2^0 + x_1 + 2^1 + \ldots + x_\infty \cdot 2^\infty$ met $x_k = 0 \lor x_k = 1$ waar is.

In de rechterkolom staat $z \cdot 2^n$. De machten van 2 in de linker en rechter kolom zijn in elke rij gelijk. Omdat in de linkerkolom de machten van 2 zo worden gekozen dat ze wanneer bij elkaar opgeteld gelijk aan x zijn en deze machten in de rechterkolom met z worden vermenigvuldigt, gebeurt er dus eigenlijk $z \cdot (x_0 \cdot 2^0) + z \cdot (x_1 + 2^1) + \ldots + z \cdot (x_\infty \cdot 2^\infty)$, waarbij de som machten van 2 gelijk is aan x en er geldt $x_k = 0 \lor x_k = 1$.

Deze methode kan ook met een ander getal dan 2. Hierbij moet gelden dat
$x = x_0 \cdot a^0 + x_1 + a^1 + \ldots + x_\infty \cdot a^\infty$ met $x_k = 0 \lor x_k = 1 \lor \ldots \lor x_k = a - 1$.

De notatie die hierboven is gebruikt is natuurlijk niet volgens stelsel type A1, maar deze werkwijze kan wel op dit stelsel worden toegepast.

Voorbeeld

In een type A1 getallenstelsel met grondtal vijf worden de tekens ɣ, β en ε gebruikt, die respectievelijk de waarden 5^0, 5^1 en 5^2 hebben.

Hierin wordt de soms βɣɣ · βββ uitgevoerd. Hierbij is x uit het voorbeeld gelijk aan βββ en z is gelijk aan βɣɣ.

Eerst wordt een tabel met de machten van (2^n) gemaakt, waarvoor geldt 2^k < βββ en $k \geq 0$. In de rechterkolom wordt 2^k · βɣɣ gezet.

2^k	2^k · βɣɣ
ɣ	βɣɣ
ɣɣ	ββɣɣɣɣ
ɣɣɣɣ	εɣɣɣ
βɣɣɣ	εεβɣ

Tabel 27: Machten van 2 en 2^k · βɣɣ

Dan wordt er gekeken welke machten van 2 in de linkerkolom samen gelijk zijn aan βββ (x). Dit is βɣɣɣ + ɣɣɣɣ + ɣɣ + ɣ.

De 2^k βɣɣ die hierbij horen worden bij elkaar opgeteld, oftewel βɣɣ + ββɣɣɣɣ + εɣɣɣ + εεβɣ.

βɣɣ + ββɣɣɣɣ + εɣɣɣ + εεβɣ = εεεββββɣɣɣɣɣ ɣɣɣɣɣ = εεεβββββ β = εεεεβ

De som βɣɣ · βββ is decimaal gelijk aan (5 + 1 + 1) · (5 + 5 + 5) = 7 · 15 = 105

εεεεβ is gelijk aan 25 + 25 + 25 + 25 + 5 = 105

2.6.4 Delen

Delen kan op een soortgelijke manier als het Egyptisch vermenigvuldigen gedaan worden.

Een getal z door x delen, betekent dat x een bepaald aantal keer van z afgetrokken wordt; $z/x = z - x - \ldots - x$. Het aantal keer dat x van z kan worden afgetrokken, is de uitkomst op z/x. Wanneer $z \bmod x \neq 0$, is er een rest. Het kan echter veel werk zijn om dit handmatig te doen op de manier van aftrekken bij type A1 stelsels die eerder is beschreven. Er kan een soortgelijke werkwijze worden toegepast als de werkwijze bij het vermenigvuldigen.

Neem de som z/x. Er wordt een tabel gemaakt. In de linkerkolom worden alle machten van 2 gezet, waarvoor geldt $2^n \geq 1$, beginnend bij 2^0. In de rechterkolom worden $2^n \cdot x$ gezet. Dit kan berekend worden door het getal in de rechterkolom steeds bij zichzelf op te tellen, oftewel, door dit getal met 2 te vermenigvuldigen.

Tabel 28: Machten van 2 en $2^n \cdot x$

2^0	x
2^1	$x \cdot 2$
2^2	$x \cdot 2^2$
2^3	$x \cdot 2^3$

…	…
2^k	$x \cdot 2^k$

Er geldt $x \cdot 2^k \leq z$.

Dan wordt er telkens een zo groot mogelijk getal uit de rechterkolom van z afgetrokken. Uiteindelijk blijft er een getal over dat kleiner is dan x, of gelijk is aan 0, wat de rest van de deelsom is.

Er wordt ondertussen bijgehouden welke getallen uit de rechterkolom van z afgetrokken worden, en welke machten van 2 daarbij horen. Deze machten van 2 worden bij elkaar opgeteld. De uitkomst van deze som is het antwoord op z/x.

Bewijs

$z/x = y + r$

y kan binair als $y = y_0 \cdot 2^0 + y_1 + 2^1 + \ldots + y_\infty \cdot 2^\infty$ met $y_k = 0 \vee y_k = 1$ geschreven worden. r staat voor z mod x.

Er geldt dus $z/x = y_0 \cdot 2^0 + y_1 + 2^1 + \ldots + y_\infty \cdot 2^\infty + r$

$\Rightarrow z = x \cdot (y_0 \cdot 2^0 + y_1 + 2^1 + \ldots + y_\infty \cdot 2^\infty + r)$
$\Rightarrow z - x \cdot (y_0 \cdot 2^0 + y_1 + 2^1 + \ldots + y_\infty \cdot 2^\infty + r) = 0$
$\Rightarrow z - x \cdot (y_0 \cdot 2^0) - x \cdot (y_1 \cdot 2^1) \ldots - x \cdot (y_\infty \cdot 2^\infty) - x \cdot r = 0$

In de rechterkolom van de gemaakte tabel staat $x \cdot (y_k \cdot 2^k)$. Er wordt telkens bijgehouden welke $x \cdot (y_k \cdot 2^k)$ er van z afgetrokken worden. In de linkerkolom staan de bijbehorende machten van 2.

Deze machten van 2 staan voor de machten van 2 in $z/x = y_0 \cdot 2^0 + y_1 + 2^1 + \ldots + y_\infty \cdot 2^\infty + r$, oftewel, voor de y in $z/x = y + r$. Wanneer deze machten van 2 dus bij elkaar opgeteld worden, wordt y berekend omdat.

Voorbeeld

Bij dit voorbeeld wordt hetzelfde 5-tallige stelsel gebruikt als bij het voorbeeld van vermenigvuldigen. Hierbij waren de tekens tekens ɣ, β en ε gebruikt, die respectievelijk de waarden 5^0, 5^1 en 5^2 hebben.

De som εεεβ/βɣɣ wordt berekend waarbij εεεβ gelijk is aan z uit het voorbeeld en βɣɣ aan x.

Eerst wordt een tabel met de machten van (2^k) gemaakt, waarvoor geldt βɣɣ $\cdot 2^k \leq$ εεεβ en $k \geq 0$. In de rechterkolom wordt βɣɣ $\cdot 2^k$ gezet.

Tabel 29: machten van 2 en βɣɣ $\cdot 2^k$

2^k	βɣɣ · 2^k
ɣ	βɣɣ
ɣɣ	ββɣɣɣɣ
ɣɣɣɣ	εɣɣɣ
βɣɣɣ	εεβɣ

Dan wordt telkens een zo groot mogelijk getal uit de rechterkolom van εεεβ afgetrokken. Ondertussen wordt bijgehouden welke 2^k daarbij horen.

εεεβ - εεβɣ = ββββɣɣɣɣ   de 2^k die hierbij hoort is βɣɣɣ

ββββɣɣɣɣ - ββɣɣɣɣ = ββ   de 2^k die hierbij hoort is ɣɣ
ββ - βɣɣ = ɣɣɣ   de 2^k die hierbij hoort is ɣ

ɣɣ < βɣɣ · 2^0 ⇒ εεεβ mod βɣɣ = ɣɣɣ

De machten van 2 worden bij elkaar opgeteld; βɣɣɣ + ɣɣ + ɣ = βɣɣɣɣɣɣ = ββɣ

Het antwoord op εεεβ/βɣɣ is dus ββɣ rest ɣɣɣ

Deze som is decimaal te schrijven als (25 + 25 + 25 + 5)/(5 + 1 + 1) = 80/7 = 11 rest 3

2.7 Algemene rekenregels voor type P2 stelsels

In dit gedeelte worden rekenregels besproken voor type P2 stelsels. Bij dit type stelsel geldt voor de cijfers $0 \leq x_k < a$, waarbij a het grondtal van het stelsel is. Er wordt in dit gedeelte ervan uitgegaan dat de gebruikte tekens de Arabische cijfers zijn, met extra toegevoegde cijfers wanneer het grondtal groter dan 10_{10} is. Het grondtal is altijd te schrijven als 10, omdat de cijfers gelijk zijn aan 0, 1, 2, 3, …, (10 - 1), 10.

2.7.1 Optellen

Elk getal in elk positioneel getallenstelsel is te schrijven als
$x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0$ met $x_k \in \mathbb{N}$

$(x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0)$ +
$(y_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + y_3 \cdot 10^3 + y_2 \cdot 10^2 + y_1 \cdot 10^1 + y_0 \cdot 10^0) =$
$x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0 + y_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + y_3 \cdot 10^3 + y_2 \cdot 10^2 + y_1 \cdot 10^1 +$
$y_0 \cdot 10^0 =$
$10^\infty \cdot (x_\infty + y_\infty) + \ldots + 10^3 \cdot (x_3 + y_3) + 10^2 \cdot (x_2 + y_2) + 10^1 \cdot (x_1 + y_1) + 10^0 \cdot (x_0 + y_0)$

Bewijs

$a \cdot 10^k$ kan geschreven worden als a met k aantal nullen erachter.

Wanneer bij $10^k \cdot (x_k + y_k) + 10^{k+1} \cdot (x_{k+1} + y_{k+1})$ geldt $(x_k + y_k) \geq 10$, dan kan $x_k + y_k$ in de vorm $10 + q$ geschreven worden. Hierbij geldt $q \in \mathbb{Z}^+$ en $0 \leq q < 10$. Hierbij is $(x_k + y_k) < 20$, dus kan
$x_k + y_k$ in de vorm $10 + q$ geschreven worden als $(x_k + y_k)$ div $10 = 1$.

$x_k + y_k = 10 + q$ invullen in $10^k \cdot (x_k + y_k) + 10^{k+1} \cdot (x_{k+1} + y_{k+1})$ geeft $10^k \cdot (10 + q) + 10^{k+1} \cdot (x_{k+1} + y_{k+1})$.

$10^k \cdot (10 + q) + 10^{k+1} \cdot (x_{k+1} + y_{k+1}) =$
$10^k \cdot 10^1 + 10^k \cdot q + 10^{k+1} \cdot (x_{k+1} + y_{k+1}) =$
$10^{k+1} + 10^k \cdot q + 10^{k+1} \cdot (x_{k+1} + y_{k+1}) =$
$10^k \cdot q + 10^{k+1} + 10^{k+1} \cdot (x_{k+1} + y_{k+1}) =$
$10^k \cdot q + 10^{k+1} \cdot (x_{k+1} + y_{k+1} + 1)$

$10^k \cdot (x_k + y_k) + 10^{k+1} \cdot (x_{k+1} + y_{k+1})$ met $(x_k + y_k)$ div $10 = 1$ kan dus geschreven worden als
$10^k \cdot q + 10^{k+1} \cdot (x_{k+1} + y_{k+1} + 1)$

$10 + q = x_k + y_k \Rightarrow q = x_k + y_k - 10$

$10^k \cdot (x_k + y_k) + 10^{k+1} \cdot (x_{k+1} + y_{k+1})$ met $(x_k + y_k)$ div $10 = 1$ kan dus geschreven worden als
$10^k \cdot (x_k + y_k - 10) + 10^{k+1} \cdot (x_{k+1} + y_{k+1} + 1)$

Werkwijze

Om twee getallen bij elkaar op te tellen wordt ($x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0$) boven ($y_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + y_3 \cdot 10^3 + y_2 \cdot 10^2 + y_1 \cdot 10^1 + y_0 \cdot 10^0$) neergezet. Vervolgens worden x_0 en y_0 bij elkaar opgeteld. Het antwoord wordt recht onder y_0 neergezet, tenzij ($x_0 + y_0$) div 10 = 1. Als dit het geval is wordt $x_0 + y_0 - 10$ onder y_0 gezet in plaats van $x_0 + y_0$. Daarnaast wordt dan ook boven x_{k+1}, dus boven x_1, een 1 neergezet. Deze 1 wordt meegenomen in de optelling van $x_1 + y_1$. Dit is hierboven bewezen. Deze stappen worden herhaald tot er links van x_k en y_k alleen nog maar nullen staan.

Voorbeeld

De som 1335_6 - 512_6 wordt berekend.

```
1335
512
------- +
```

De twee getallen worden eerst onder elkaar gezet.

```
   1
1335
512
------- +
      1
```

x_0 en y_0 worden eerst bij elkaar opgeteld. 5 + 2 = 5 + 1 + 1= 10 + 1 = 11. (5 + 2) div 10 = 11 div 10 = 1, dus onder y_0 wordt 5 + 2 - 10 neergezet, oftewel 11 - 10 = 1.
Boven x_{k+1} wordt een 1 neergezet, dus boven $x_{0+1} = x_1$.

```
   1
1335
 512
------- +
    51
```

Nu wordt er gekeken naar x_1 en y_1. 1 + 3 + 1 = 5.
(1 + 3 + 1) div 10 = 5 div 10 = 0 ≠ 1, dus er wordt een 5 neergezet onder y_1.

```
1  1
1335
 512
------- +
  251
```

x_2 en y_2 bij elkaar optellen geeft 3 + 5 = 5 + 1 + 2 = 10 + 2= 12. (3 + 5) div 10 = 12 div 10 = 1, dus onder y_2 wordt 3 + 5 - 10 neergezet, oftewel 12 - 10 oftewel 2.
Boven x_{k+1} wordt een 1 neergezet, dus boven $x_{2+1} = x_3$.

```
1  1
1335
 512
------- +
2251
```

Als laatste wordt er gekeken naar x_3. Links van y_2 staan alleen maar nullen dus daar hoeft niet meer naar gekeken te worden. (1 + 1) div 10 = 2 div 10 = 0 ≠ 1, dus er wordt een 2 neergezet onder y_3. Ook links van x_3 staan alleen maar nullen , en boven x_4 staan geen cijfers, dus de berekening is klaar.

In een getallenstelsel met 6 als grondtal, geldt 1335 + 512 = 2251.

2.7.2 Aftrekken

Elk getal in elk positioneel stelsel te schrijven als $x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0$ met $x \in \mathbb{N}$.

Getal y van getal x aftrekken geeft
$(x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0)$ -
$(y_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + y_3 \cdot 10^3 + y_2 \cdot 10^2 + y_1 \cdot 10^1 + y_0 \cdot 10^0) =$
$x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0$ -
$y_\infty \cdot 10^\infty - \ldots - y_3 \cdot 10^3 - y_2 \cdot 10^2 - y_1 \cdot 10^1 - y_0 \cdot 10^0 =$
$10^\infty \cdot (x_\infty - y_\infty) + \ldots + 10^3 \cdot (x_3 - y_3) + 10^2 \cdot (x_2 - y_2) + 10^1 \cdot (x_1 - y_1) + 10^0 \cdot (x_0 - y_0) =$
$z_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + z_3 \cdot 10^3 + z_2 \cdot 10^2 + z_1 \cdot 10^1 + z_0 \cdot 10^0$

Wanneer $0 < x_k - y_k < 10$ dan geldt $z_k = x_k - y_k$

Wanneer $x_k - y_k = 0$ dan geldt $z_k = 0$

Wanneer $x_k - y_k < 0$ dan geldt $z_k = 10 + (x_k - y_k)$ en z_{k+1} wordt $z_{k+1} - 1$

Bewijs

Stel $(x_k - y_k) \cdot 10^k + (x_{k+1} - y_{k+1}) \cdot 10^{k+1}$ met $(x_k - y_k) < 0$
Wanneer $(x_k - y_k + 10) = q$ dan $x_k - y_k = q - 10$
$(x_k - y_k + 10) \in \mathbb{N}$, dus $q \in \mathbb{N}$, want $x_k - y_k > -10$ omdat $x_k \geq 0$ en $y_k < 10$
$x_k - y_k$ kan dus geschreven worden als $q - 10$

$(x_k - y_k) \cdot 10^k + (x_{k+1} - y_{k+1}) \cdot 10^{k+1} =$
$(q - 10) \cdot 10^k + (x_{k+1} - y_{k+1}) \cdot 10^{k+1} =$
$q \cdot 10^k - 10 \cdot 10^k + (x_{k+1} - y_{k+1}) \cdot 10^{k+1} =$
$q \cdot 10^k - 10^{k+1} + (x_{k+1} - y_{k+1}) \cdot 10^{k+1} =$
$q \cdot 10^k + (x_{k+1} - y_{k+1} - 1) \cdot 10^{k+1} =$
$q = x_k - y_k + 10$, dus
$(x_k - y_k) \cdot 10^k + (x_{k+1} - y_{k+1}) \cdot 10^{k+1}$ kan geschreven worden als
$(x_k - y_k + 10) \cdot 10^k + (x_{k+1} - y_{k+1} - 1) \cdot 10^{k+1}$, mits $(x_k - y_k) < 0$

Werkwijze

Om getal y van getal x af te trekken wordt $(x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0)$ boven $(y_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + y_3 \cdot 10^3 + y_2 \cdot 10^2 + y_1 \cdot 10^1 + y_0 \cdot 10^0)$ gezet. Vervolgens wordt y_0 van x_0 afgetrokken. De uitkomst hiervan wordt recht onder y_0 gezet, behalve als $x_0 - y_0 < 0$. Wanneer dit het geval is, dan wordt $10 + (x_0 - y_0)$ onder y_0 geplaatst en van x_{k+1}, oftewel x_1, wordt 1 afgetrokken.
Dit wordt herhaald totdat er zowel links van x_k als links van y_k alleen nog maar nullen staan.

Voorbeeld

De som $1453_7 - 562_7$ wordt berekend.

1453 562 ------- -	Eerst worden de getallen boven elkaar gezet
1453 562 ------- - 1	Daarna wordt $x_0 - y_0$ berekend. $x_0 = 3$ en $y_0 = 2$ dus $x_0 - y_0 = 3 - 2 = 1$. $0 < 1 < 10$, dus deze 1 wordt recht onder y_0 gezet.
-1 1543 562 ------- - 51	Dan wordt $x_1 - y_1$ berekend. $x_1 - y_1$ is gelijk aan $4 - 6 = -2$. $-2 < 0$ dus onder y_1 wordt $10 + (x_1 - y_1) = 10 + - 2 = 5$ geplaatst. Ook wordt in de volgende stap van x_{k+1}, oftewel x_2, 1 afgetrokken.
-1-1 1543 562 ------- - 651	Nu wordt er gekeken naar $x_2 - y_2$. Volgens het hierboven gegeven bewijs wordt x_2 van y_2 afgetrokken, en dan wordt daar nog eens 1 vanaf getrokken. $x_2 - y_2 - 1 = 5 - 5 - 1 = -1$. $-1 < 0$ dus onder y_2 wordt $10 + (x_2 - y_2 - 1) = 6$ neergezet. Boven x_{k+1} , dus boven x_3 , wordt weer -1 neergezet.
-1-1 1543 562 ------- - 0651	Als laatste wordt x_3 van y_3 afgetrokken, en vervolgens wordt er nog 1 vanaf getrokken. $(x_3 - y_3 - 1) = (1 - 0 - 1) = 0$, dus onder y_3 wordt een 0 neergezet. Er staan alleen nog maar nullen links van x_3 en y_3, dus de berekening is klaar.

In een getallenstelsel is het antwoord op 1543 - 562 dus 651.

2.7.3 Vermenigvuldigen

Bij het vermenigvuldigen wordt elk onderdeel van beide getallen met elkaar vermenigvuldigt, en daarna bij elkaar opgeteld. $x \cdot y$ is dus gelijk aan $(y_\infty \cdot x_\infty) \cdot 10^{2\infty} + \ldots + (y_\infty \cdot x_3) \cdot 10^{\infty+3} + (y_\infty \cdot x_2) \cdot 10^{\infty+2} + (y_\infty \cdot x_1) \cdot 10^{\infty+1} + (y_\infty \cdot x_0) \cdot 10^{\infty}$.

$+ \quad \ldots +$
$(y_3 \cdot x_\infty) \cdot 10^{\infty+3} + \ldots + (y_3 \cdot x_3) \cdot 10^6 + (y_3 \cdot x_2) \cdot 10^5 + (y_3 \cdot x_1) \cdot 10^4 + (y_3 \cdot x_0) \cdot 10^3 +$
$(y_2 \cdot x_\infty) \cdot 10^{\infty+2} + \ldots + (y_2 \cdot x_3) \cdot 10^5 + (y_2 \cdot x_2) \cdot 10^4 + (y_2 \cdot x_1) \cdot 10^3 + (y_2 \cdot x_0) \cdot 10^2 +$
$(y_1 \cdot x_\infty) \cdot 10^{\infty+1} + \ldots + (y_1 \cdot x_3) \cdot 10^4 + (y_1 \cdot x_2) \cdot 10^3 + (y_1 \cdot x_1) \cdot 10^2 + (y_1 \cdot x_0) \cdot 10^1 +$
$(y_0 \cdot x_\infty) \cdot 10^{\infty} \quad + \ldots + (y_0 \cdot x_3) \cdot 10^3 + (y_0 \cdot x_2) \cdot 10^2 + (y_0 \cdot x_1) \cdot 10^1 + (y_0 \cdot x_0) \cdot 10^0$

Hierbij geldt $x, y \in \mathbb{N}$.

Bewijs

$(x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0) \cdot (y_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + y_3 \cdot 10^3 + y_2 \cdot 10^2 + y_1 \cdot 10^1 + y_0 \cdot 10^0) =$

$y_\infty \cdot 10^\infty (x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0)$
$+ \quad \ldots +$
$y_3 \cdot 10^3 \cdot (x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0) +$
$y_2 \cdot 10^2 \cdot (x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0) +$
$y_1 \cdot 10^1 \cdot (x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0) +$
$y_0 \cdot 10^0 \cdot (x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0) =$

$y_\infty \cdot 10^\infty \cdot x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + y_\infty \cdot 10^\infty \cdot x_3 \cdot 10^3 + y_\infty \cdot 10^\infty \cdot x_2 \cdot 10^2 + y_\infty \cdot 10^\infty \cdot x_1 \cdot 10^1 + y_\infty \cdot 10^\infty \cdot x_0 \cdot 10^0$
$+ \quad \ldots +$
$y_3 \cdot 10^3 \cdot x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + y_3 \cdot 10^3 \cdot x_3 \cdot 10^3 + y_3 \cdot 10^3 \cdot x_2 \cdot 10^2 + y_3 \cdot 10^3 \cdot x_1 \cdot 10^1 + y_3 \cdot 10^3 \cdot x_0 \cdot 10^0 + y_2$
$\cdot 10^2 \quad \cdot x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + y_2 \cdot 10^2 \cdot x_3 \cdot 10^3 + y_2 \cdot 10^2 \cdot x_2 \cdot 10^2 + y_2 \cdot 10^2 \cdot x_1 \cdot 10^1 + y_2 \cdot 10^2 \cdot x_0 \cdot 10^0 + y_1$
$\cdot 10^1 \quad \cdot x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + y_1 \cdot 10^1 \cdot x_3 \cdot 10^3 + y_1 \cdot 10^1 \cdot x_2 \cdot 10^2 + y_1 \cdot 10^1 \cdot x_1 \cdot 10^1 + y_1 \cdot 10^1 \cdot x_0 \cdot 10^0 + y_0$
$\cdot 10^0 \quad \cdot x_\infty \cdot 10^\infty + \ldots + y_0 \cdot 10^0 \cdot x_3 \cdot 10^3 + y_0 \cdot 10^0 \cdot x_2 \cdot 10^2 + y_0 \cdot 10^0 \cdot x_1 \cdot 10^1 + y_0 \cdot 10^0 \cdot x_0 \cdot 10^0 =$

$(y_\infty \cdot x_\infty) \cdot 10^{2\infty} + \ldots + (y_\infty \cdot x_3) \cdot 10^{\infty+3} + (y_\infty \cdot x_2) \cdot 10^{\infty+2} + (y_\infty \cdot x_1) \cdot 10^{\infty+1} + (y_\infty \cdot x_0) \cdot 10^{\infty}$
$+ \quad \ldots +$
$(y_3 \cdot x_\infty) \cdot 10^{\infty+3} + \ldots + (y_3 \cdot x_3) \cdot 10^6 + (y_3 \cdot x_2) \cdot 10^5 + (y_3 \cdot x_1) \cdot 10^4 + (y_3 \cdot x_0) \cdot 10^3 +$
$(y_2 \cdot x_\infty) \cdot 10^{\infty+2} + \ldots + (y_2 \cdot x_3) \cdot 10^5 + (y_2 \cdot x_2) \cdot 10^4 + (y_2 \cdot x_1) \cdot 10^3 + (y_2 \cdot x_0) \cdot 10^2 +$
$(y_1 \cdot x_\infty) \cdot 10^{\infty+1} + \ldots + (y_1 \cdot x_3) \cdot 10^4 + (y_1 \cdot x_2) \cdot 10^3 + (y_1 \cdot x_1) \cdot 10^2 + (y_1 \cdot x_0) \cdot 10^1 +$
$(y_0 \cdot x_\infty) \cdot 10^{\infty} \quad + \ldots + (y_0 \cdot x_3) \cdot 10^3 + (y_0 \cdot x_2) \cdot 10^2 + (y_0 \cdot x_1) \cdot 10^1 + (y_0 \cdot x_0) \cdot 10^0$

$a \cdot 10^k$ kan geschreven worden als a met k nullen erachter. Elk getal wordt genoteerd als $x_k \cdot 10^k$, dus elk product $x_k \cdot 10^k \cdot y_n \cdot 10^n$ van getallen, afgekort $(x_k y_n) \cdot 10^{k+n}$, kan geschreven worden als $x_k y_n$ met $(k + n)$ nullen erachter. Deze waarde $(k + n)$ wordt in de werkwijze en het voorbeeld de kn-waarde genoemd.

Werkwijze

Het grootste getal wordt boven het kleinere getal gezet. Het grootste getal wordt x genoemd, en het kleinste getal y. Eerst wordt y_0 met x_0 vermenigvuldigd. Dit product z wordt onder de deelstreep genoteerd. Wanneer z uit 1 cijfer bestaat, wordt het direct onder y_0 geplaatst, maar als z uit 2 cijfers bestaat, wordt z_1 onder y_1 gezet en z_0 onder y_0.

Vervolgens wordt y_1 met x_0 vermenigvuldigd. Dit product wordt v genoemd. y_1 is een tiental, dus het product van y_1 en x_0 moet vermenigvuldigd worden met 10^1, want $1 + 0 = 1$, dus de kn-waarde is 1. Onder z_0 wordt nu dus een 0 geplaatst.

Vervolgens wordt v_0 onder z_1 geplaatst en v_1 onder z_2. Hierna wordt y_2 met x_0 vermenigvuldigd. Dit product krijgt weer een letter als naam, en er worden nu 2 nullen neergezet; 1 nul onder v_0 en 1 onder v_1. Dit wordt gedaan omdat het product 2 keer vermenigvuldigd moet worden met 10^1, dus in totaal met 10^2. Dit is hetzelfde als 2 nullen achter het product. In het bewijs is ook gegeven dat het aantal nullen achter het product gelijk is aan de kn-waarde. Daarna wordt het product van y_2 en x_0 weer onder v_2 gezet, en eventueel onder v_3 als het product groter of gelijk is aan 10. Dit wordt gedaan tot er links van y_k alleen maar nullen staan en y_k zelf ook 0 is.

Hierna wordt y_0 met x_1 vermenigvuldigt. Deze wordt op dezelfde manier als hierboven beschreven onder de andere producten gezet, met 1 nul erachter, want de kn-waarde is 1. Daarna wordt dit ook gedaan met y_1 en x_1 en nu met 2 nullen, want hier is de kn-waarde 2. Dit wordt herhaald tot er links van y_k alleen maar nullen staan en y_k ook nul is. Dit principe dat nu met x_0 en x_1 is voorgedaan wordt herhaald totdat er links van x_k alleen maar nullen staan en x_k zelf ook nul is. Nu staan alle producten onder elkaar. Deze moeten allemaal bij elkaar opgeteld worden op de manier die bij optellen is bewezen en uitgewerkt. De som van al deze producten is het eindantwoord.

Voorbeeld

$32_6 \cdot 513_6$ wordt berekend.

```
 513
  32
----- x
```

513 > 32, dus 513 wordt bovenaan gezet en wordt x genoemd, 32 wordt y genoemd. y_1 is hier dan ook 3 en $y_0 = 2$. Eerst worden x_0 en y_0 met elkaar vermenigvuldigd.

```
 513
  32
----- x
  10
```

De kn-waarde is hier 0, dus er hoeft geen 0 achter. $3 \cdot 2 = 3 + 3 = 3 + 2 + 1 + 5 + 1 = 10$, dus dit wordt genoteerd. Nu wordt er gekeken naar $x_0 \cdot y_1$.

```
 513
1
  32
----- x
  10
 130
```

Bij $x_0 \cdot y_1$ is de kn-waarde gelijk aan $0 + 1 = 1$, dus er wordt nul neergezet. $3 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 = 10 + 3 = 13$, dus dit komt voor de nul te staan.

```
 513
  32
----- x
  10
 130
  20
```

Bij $x_1 \cdot y_0$ is de kn-waarde gelijk aan 1 + 0 = 1, dus er wordt 1 nul neergezet. 2 · 1 = 2, dus dit komt voor de nul te staan

```
 513
  32
----- x
  10
 130
  20
 300
```

Bij $x_1 \cdot y_1$ is de kn-waarde gelijk aan 1 + 1 = 2, dus er worden 2 nullen neergezet. 1 · 3 = 3, dus dit komt voor de nullen te staan.

```
 513
  32
----- x
  10
 130
  20
 300
1400
```

Bij $x_2 \cdot y_0$ is de kn-waarde gelijk aan 2 + 0 = 2, dus er worden 2 nullen neergezet. 5 · 2 = 5 + 5 = 5 + 1 + 4 = 10 + 4 = 14, dus dit komt voor de nullen te staan

```
  513
   32
 ----- x
   10
  130
   20
  300
 1400
23000
```

Bij $x_2 \cdot y_1$ is de kn-waarde gelijk aan 2 + 1 = 3, dus er worden 3 nullen neergezet. 5 · 3 = 5 + 5 + 5 = 14 + 5 = 14 + 2 + 3 = 23, dus dit komt voor de 0 te staan

```
  513
   32
 ----- x
   10
  130
   20
  300
 1400
23000
-------- +
25300
```

Als laatst worden alle producten bij elkaar opgeteld Dit wordt gedaan op de manier beschreven bij optellen en hier dus verder niet meer uitgewerkt.

In een 6-tallig stelsel geldt 513 · 32 = 25300.

2.7.4 Delen

Bewijs

Er geldt a / b = a div b rest a mod b = a div b + (a mod b)/b

Er geldt $(x_n/m) \cdot 10^n = ((x_n \cdot 10)/m) \cdot 10^{n-1}$

$(x_4 \cdot 10^4 + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0)/m =$

$(x_4 \cdot 10^4) / m + (x_3 \cdot 10^3) / m + (x_2 \cdot 10^2) / m + (x_1 \cdot 10^1) / m + (x_0 \cdot 10^0) / m =$

$(x_4/m) \cdot 10^4 + (x_3/m) \cdot 10^3 + (x_2/m) \cdot 10^2 + (x_1/m) \cdot 10^1 + (x_0/m) \cdot 10^0 =$

$10^4 \cdot (x_4 \text{ div } m + (x_4 \text{ mod } m)/m) + 10^3 \cdot (x_3 \text{ div } m + (x_3 \text{ mod } m)/m) + 10^2 \cdot (x_2 \text{ div } m + (x_2 \text{ mod } m)/m) + 10^1 \cdot (x_1 \text{ div } m + (x_1 \text{ mod } m)/m) + 10^0 \cdot (x_0 \text{ div } m + (x_0 \text{ mod } m)/m) =$

$10^4 \cdot x_4 \text{ div } m + 10^4 \cdot ((x_4 \text{ mod } m)/m) + 10^3 \cdot x_3 \text{ div } m + 10^3 \cdot ((x_3 \text{ mod } m)/m) + 10^2 \cdot x_2 \text{ div } m + 10^2 \cdot ((x_2 \text{ mod } m)/m) + 10^1 \cdot x_1 \text{ div } m + 10^1 \cdot ((x_1 \text{ mod } m)/m) + 10^0 \cdot x_0 \text{ div } m + 10^0 \cdot ((x_0 \text{ mod } m)/m) =$

$10^4 \cdot x_4 \text{ div } m +$
$10^3 \cdot ((10 \cdot (x_4) \text{ mod } m)/m) + 10^3 \cdot x_3 \text{ div } m +$
$10^2 \cdot ((10 \cdot (x_3) \text{ mod } m)/m) + 10^2 \cdot x_2 \text{ div } m +$
$10^1 \cdot ((10 \cdot (x_2) \text{ mod } m)/m) + 10^1 \cdot x_1 \text{ div } m +$
$10^0 \cdot ((10 \cdot (x_1) \text{ mod } m)/m) + 10^0 \cdot x_0 \text{ div } m +$
$10^0 \cdot (((x_0) \text{ mod } m)/m) =$

$10^4 \cdot x_4 \text{ div } m +$
$10^3 \cdot (((10 \cdot (x_4) \text{ mod } m)/m) + x_3 \text{ div } m) +$
$10^2 \cdot (((10 \cdot (x_3) \text{ mod } m)/m) + x_2 \text{ div } m) +$
$10^1 \cdot (((10 \cdot (x_2) \text{ mod } m)/m) + x_1 \text{ div } m) +$
$10^0 \cdot (((10 \cdot (x_1) \text{ mod } m)/m) + x_0 \text{ div } m) +$
$10^0 \cdot ((((x_0) \text{ mod } m)/m) =$

Er geldt a / b = a div b rest a mod b, dus
$(10 \cdot (x_k) \text{ mod } m)/m) + (x_{k-1}) \text{ div } m) = (x_{k-1}) \text{ div } m + (10 \cdot (x_k) \text{ mod } m) \text{ div } m \text{ rest } (10 \cdot (x_k) \text{ mod } m) \text{ mod } m$

Stel a div m = r en b div m = p met $a, m, r, b, p \in \mathbb{N}$ en er geldt $a + b < m$
Dit kan worden geschreven als $a = r \cdot m$ en $b = p \cdot m$
$a + b = r \cdot m + p \cdot m = m \cdot (r + p)$
$(a + b) \text{ div } m = (m \cdot (r + p)) \text{ div } m = r + p$
Als a div m = r en b div m = p, dan geldt (a + b) div m = r + p

(x_{k-1}) div m + (10 · (x_k) mod m) div m rest (10 · (x_k) mod m) mod m = (10 · (x_k) mod m + x_{k-1}) div m rest (10 · (x_k) mod m) mod m, dus hieruit volgt dat de op de vorige pagina beschreven deelsom kan worden geschreven als:

$10^4 \cdot x_4$ div m +
$10^3 \cdot (10 \cdot ((x_4)$ mod m) + x_3) div m rest (10 · (x_4) mod m) mod m +
$10^2 \cdot (10 \cdot ((x_3)$ mod m) + x_2) div m rest (10 · (x_3) mod m) mod m +
$10^1 \cdot (10 \cdot ((x_2)$ mod m) + x_1) div m rest (10 · (x_2) mod m) mod m +
$10^0 \cdot (10 \cdot ((x_1)$ mod m) + x_0) div m rest (10 · (x_1) mod m) mod m +
$10^0 \cdot ((((x_0)$ mod m)/m)

De resten die bij alles overblijven kunnen worden meegenomen in de volgende rij, dus bijvoorbeeld de rest (10 · (x_4) mod m) mod m kan zonder de laatste mod m worden opgeteld bij de x_3 als rest en meegenomen worden in de som. De rest die hier overblijft, wordt bij de volgende regel weer toegevoegd bij de regel daaronder met de andere rest. Dit blijft zo doorgaan totdat de hele grote rest bij de onderste regel zit en dit kan worden uitgerekend. Elke deelsom (voor getallen met een deeltal gelijk of groter dan 10^5 is het bewijs eenvoudig uit te breiden) kan dus op de onderstaande manier opgeschreven worden:

$10^4\,(x_4)$ div m +
$10^3\,(10\,((x_4)$ mod m) + x_3) div m +
$10^2\,(10\,((10\,((x_4)$ mod m) + x_3) mod m) + x_2) div m +
$10^1\,(10\,((10\,((10\,((x_4)$ mod m) + x_3) mod m) + x_2) mod m) + x_1) div m +
$10^0\,(10\,((10\,((10\,((10\,((x_4)$ mod m) + x_3) mod m) + x_2) mod m) + x_1) mod m) + x_0) div m
(10^0 (10 ((10 ((10 ((10 $((x_4)$ mod m) + x_3) mod m) + x_2) mod m) + x_1) mod m) + x_0) mod m)/m

~~~~~~

$(x_4 \cdot 10^4 + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0)/m =$

$(x_4 \cdot 10^4) / m + (x_3 \cdot 10^3) / m + (x_2 \cdot 10^2) / m + (x_1 \cdot 10^1) / m + (x_0 \cdot 10^0) / m =$

$(x_4 / m) \cdot 10^4 + (x_3 / m) \cdot 10^3 + (x_2 / m) \cdot 10^2 + (x_1 / m) \cdot 10^1 + (x_0 / m) \cdot 10^0 =$

$10^4 \cdot (x_4$ div m + $(x_4$ mod m) / m) + $10^3 \cdot (x_3$ div m + $(x_3$ mod m) / m) + $10^2 \cdot (x_2$ div m + $(x_2$ mod m) / m) + $10^1 \cdot (x_1$ div m + $(x_1$ mod m) / m) + $10^0 \cdot (x_0$ div m + $(x_0$ mod m) / m) =

$10^4 \cdot x_4$ div m + $10^4 \cdot ((x_4$ mod m) / m) + $10^3 \cdot x_3$ div m + $10^3 \cdot ((x_3$ mod m) / m) + $10^2 \cdot x_2$ div m + $10^2 \cdot ((x_2$ mod m) / m) + $10^1 \cdot x_1$ div m + $10^1 \cdot ((x_1$ mod m) / m) + $10^0 \cdot x_0$ div m + $10^0 \cdot ((x_0$ mod m) / m)

$10^4 \cdot (x_4)$ div m = $10^4 \cdot p$
($10^4 \cdot (x_4)$ mod m) / m = $10^4 \cdot$ a / m, met a = (x_4) mod m)

$10^3 \cdot 10a / m + 10^3 \cdot x_3 / m =$
$10^3\,((10a + x_3) / m) =$
$10^3\,((10a + x_3)$ div m) + $10^3\,(((10a + x_3)$ mod m)) / m
$10^3\,((10a + x_3)$ div m) = $10^3 \cdot q$ en $10^3\,(((10a + x_3)$ mod m))/m = $10^3 \cdot b / m$. b is hier dus $(((10a + x_3)$ mod m
~~~~~~

$10^3 \cdot b / m = 10^2 \cdot 10b / m$
$10^2 \cdot 10b / m + 10^2 \cdot x_2 / m =$
$10^2 ((10b + x_2) / m) =$
$10^2 ((10b + x_2) \text{ div } m) + 10^2 (((10b + x_2) \text{ mod } m)) / m$
$10^2 ((10b + x_2) \text{ div } m) = 10^2 \cdot r$ en $10^2 (((10b + x_2) \text{ mod } m))/m = 10^2 \cdot c / m$. c is hier dus $(((10b + x_2)$ mod m

$10^2 \cdot c / m = 10^1 \cdot 10c / m$
$10^1 \cdot 10c / m + 10^1 \cdot x_1 / m =$
$10^1 ((10c + x_1) / m) =$
$10^1 ((10c + x_1) \text{ div } m) + 10^1 (((10c + x_1) \text{ mod } m)) / m$
$10^1 ((10 + x_1) \text{ div } m) = 10^1 \cdot s$ en $10^1 (((10c + x_1) \text{ mod } m))/m = 10^1 \cdot d / m$. d is hier dus $(((10c + x_1)$ mod m

$10^1 \cdot d / m = 10^0 \cdot 10d / m$
$10^0 \cdot 10d / m + 10^0 \cdot x_0 / m =$
$10^0 ((10d + x_0) / m) =$
$10^0 ((10d + x_0) \text{ div } m) + 10^0 (((10d + x_0) \text{ mod } m)) / m$
$10^0 ((10d + x_0) \text{ div } m) = 10^0 \cdot t$ en $10^0 (((10d + x_0) \text{ mod } m)) / m = 10^0 \cdot e / m$. e is hier dus $(((10e + x_0)$ mod m

$a = (x_4) \text{ mod } m$
$b = (10a + x_3) \text{ mod } m$
$c = (10b + x_2) \text{ mod } m$
$d = (10c + x_1) \text{ mod } m$
$e = (10d + x_0) \text{ mod } m$
$p = (x_4) \text{ div } m$
$q = (10a + x_3) \text{ div } m$
$r = (10b + x_2) \text{ div } m$
$s = (10c + x_1) \text{ div } m$
$t = (10d + x_0) \text{ div } m$

Vervolgens wordt a in b gesubstitueerd, b in c enzovoort.

$a = (x_4) \text{ mod } m$
$b = (10((x_4) \text{ mod } m) + x_3) \text{ mod } m$
$c = (10((10((x_4) \text{ mod } m) + x_3) \text{ mod } m) + x_2) \text{ mod } m$
$d = (10((10((10((x_4) \text{ mod } m) + x_3) \text{ mod } m) + x_2) \text{ mod } m) + x_1) \text{ mod } m$
$e = (10((10((10((10((x_4) \text{ mod } m) + x_3) \text{ mod } m) + x_2) \text{ mod } m) + x_1) \text{ mod } m) + x_0) \text{ mod } m$

$(x_4 \cdot 10^4 + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0) / m =$
$10^4 \cdot p + 10^3 \cdot q + 10^2 \cdot r + 10^1 \cdot s + 10^0 \cdot t + 10^0 \cdot (e/m)$

e bevat hier alle resten van alle andere deelsommen, dus dit is aan elkaar gelijk. substitueren van alle waardes van p, q, r, s, t en e geeft:

$10^4 \cdot (x_4) \text{ div } m$ +
$10^3 \cdot (10a + x_3) \text{ div } m$ +

$10^2 \cdot (10b + x_2)$ div m +
$10^1 \cdot (10c + x_1)$ div m +
$10^0 \cdot (10d + x_0)$ div m +
$10^0 \cdot (((10d + x_0)$ mod m$)/$m$)$

Als allerlaatst worden de waardes van a, b, c en d terug gesubstitueerd in de deelsom:

$10^4 \cdot (x_4)$ div m +
$10^3 \cdot (10((x_4)$ mod m$) + x_3)$ div m +
$10^2 \cdot (10((10((x_4)$ mod m$) + x_3)$ mod m$) + x_2)$ div m +
$10^1 \cdot (10((10((10((x_4)$ mod m$) + x_3)$ mod m$) + x_2)$ mod m$) + x_1)$ div m +
$10^0 \cdot (10((10((10((10((x_4)$ mod m$) + x_3)$ mod m$) + x_2)$ mod m$) + x_1)$ mod m$) + x_0)$ div m +
$10^0 \cdot (((10((10((10((10((x_4)$ mod m$) + x_3)$ mod m$) + x_2)$ mod m$) + x_1)$ mod m$) + x_0)$ mod m$)/$m$)$

Dit is precies dezelfde deelsom als de deelsom die in het eerste deel van het bewijs werd bewezen. Deze kan weer duidelijker worden gemaakt met gekleurde haakjes.

$10^4\,(x_4)$ div m +
$10^3\,(10\,((x_4)$ mod m$) + x_3)$ div m +
$10^2\,(10\,((10\,((x_4)$ mod m$) + x_3)$ mod m$) + x_2)$ div m +
$10^1\,(10\,((10\,((10\,((x_4)$ mod m$) + x_3)$ mod m$) + x_2)$ mod m$) + x_1)$ div m +
$10^0\,(10\,((10\,((10\,((10\,((x_4)$ mod m$) + x_3)$ mod m$) + x_2)$ mod m$) + x_1)$ mod m$) + x_0)$ div m +
$(10^0\,(10\,((10\,((10\,((10\,((x_4)$ mod m$) + x_3)$ mod m$) + x_2)$ mod m$) + x_1)$ mod m$) + x_0)$ mod m$)$ / m

Er is nu dus bewezen dat elke deelsom met als x-waarde een getal kleiner dan 10^5 en als deler m zo kan worden omgeschreven, maar ook dat de eerste methode en de tweede methode dezelfde breuk geven, dus de tweede methode kan gebruikt worden om een breuk op te lossen. Dit kan met onderstaande werkwijze.

Werkwijze

Eerst wordt de deelsom omgeschreven naar de vorm $(x_4 \cdot 10^4 + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0)$ / m. Hierin is m de deler en x_4 het eerste cijfer van het deeltal, x_3 het tweede enzovoort. Bewezen is dat het antwoord van de deelsom $(x_4 \cdot 10^4 + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0)$ / m
gelijk is aan
$10^4\,(x_4)$ div m +
$10^3\,(10\,((x_4)$ mod m$) + x_3)$ div m +
$10^2\,(10\,((10\,((x_4)$ mod m$) + x_3)$ mod m$) + x_2)$ div m +
$10^1\,(10\,((10\,((10\,((x_4)$ mod m$) + x_3)$ mod m$) + x_2)$ mod m$) + x_1)$ div m +
$10^0\,(10\,((10\,((10\,((10\,((x_4)$ mod m$) + x_3)$ mod m$) + x_2)$ mod m$) + x_1)$ mod m$) + x_0)$ div m +
$(10^0\,(10\,((10\,((10\,((10\,((x_4)$ mod m$) + x_3)$ mod m$) + x_2)$ mod m$) + x_1)$ mod m$) + x_0)$ mod m$)$ / m.
Deze quotiënt wordt helemaal ingevuld en uitgerekend. Hierbij moet goed op de haakjes gelet worden. Daarom zijn deze in het voorbeeld met kleurtjes aangegeven. Een hulpmiddel is om eerst bepaalde delen van de quotiënt uit te rekenen, zoals bijvoorbeeld
$10\,((x_4)$ mod m$) + x_3$. Dit deel komt meerdere keren voor en kan dus worden gesubstitueerd in de andere delen.

Voorbeeld

De som 73152_9 / 26_9 wordt berekend.

$73152 / 26 = (7 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0) / 26$

$x_4 = 7$
$x_3 = 3$
$x_2 = 1$
$x_1 = 5$
$x_0 = 2$
$m = 26$

$(x_4 \cdot 10^4 + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0) / m =$
$10^4 (x_4) \text{ div } m +$
$10^3 (10 ((x_4) \bmod m) + x_3) \text{ div } m +$
$10^2 (10 ((10 ((x_4) \bmod m) + x_3) \bmod m) + x_2) \text{ div } m +$
$10^1 (10 ((10 ((10 ((x_4) \bmod m) + x_3) \bmod m) + x_2) \bmod m) + x_1) \text{ div } m +$
$10^0 (10 ((10 ((10 ((10 ((x_4) \bmod m) + x_3) \bmod m) + x_2) \bmod m) + x_1) \bmod m) + x_0) \text{ div } m +$
$(10^0 (10 ((10 ((10 ((10 ((x_4) \bmod m) + x_3) \bmod m) + x_2) \bmod m) + x_1) \bmod m) + x_0) \bmod m) / m$

dus
$73152 / 26 =$

$10^4 (7) \text{ div } 26 +$
$10^3 (10 ((7) \bmod 26) + 3) \text{ div } 26 +$
$10^2 (10 ((10 ((7) \bmod 26) + 3) \bmod 26) + 1) \text{ div } 26 +$
$10^1 (10 ((10 ((10 ((7) \bmod 26) + 3) \bmod 26) + 1) \bmod 26) + 5) \text{ div } 26 +$
$10^0 (10 ((10 ((10 ((10 ((7) \bmod 26) + 3) \bmod 26) + 1) \bmod 26) + 5) \bmod 26) + 2) \text{ div } 26 +$
$(10^0 (10 ((10 ((10 ((10 ((7) \bmod 26) + 3) \bmod 26) + 1) \bmod 26) + 5) \bmod 26) + 2) \bmod 26) / 26$

7 mod 26 = 7, dus 10 ((7) mod 26) + 3 = 73 dus (10 ((7) mod 26) + 3) mod 26 = 73 mod 26 = 20 en (10 ((7) mod 26) + 3) div 26 = 2

$10^4 (7) \text{ div } 26 +$
$10^3 (10 ((7) \bmod 26) + 3) \text{ div } 26 +$
$10^2 (10 ((10 ((7) \bmod 26) + 3) \bmod 26) + 1) \text{ div } 26 +$
$10^1 (10 ((10 ((10 ((7) \bmod 26) + 3) \bmod 26) + 1) \bmod 26) + 5) \text{ div } 26 +$
$10^0 (10 ((10 ((10 ((10 ((7) \bmod 26) + 3) \bmod 26) + 1) \bmod 26) + 5) \bmod 26) + 2) \text{ div } 26 +$
$(10^0 (10 ((10 ((10 ((10 ((7) \bmod 26) + 3) \bmod 26) + 1) \bmod 26) + 5) \bmod 26) + 2) \bmod 26) / 26 =$

$10^4 (7) \text{ div } 26 +$
$10^3 \cdot 2 +$
$10^2 (10 \cdot 20 + 1) \text{ div } 26 +$
$10^1 (10 ((10 \cdot 20 + 1) \bmod 26) + 5) \text{ div } 26 +$
$10^0 (10 ((10 ((10 \cdot 20 + 1) \bmod 26) + 5) \bmod 26) + 2) \text{ div } 26 +$
$(10^0 (10 ((10 ((10 \cdot 20 + 1) \bmod 26) + 5) \bmod 26) + 2) \bmod 26) / 26$

$10 \cdot 20 + 1 = 201$, dus $10 \cdot (10 \cdot 20 + 1) \bmod 26 + 5 = 10 \cdot 201 \bmod 26 + 5 = 10 \cdot 21 + 5 = 215$

$10^4\,(7)$ div $26 +$
$10^3 \cdot 2 +$
$10^2\,(10 \cdot 20 + 1)$ div $26 +$
$10^1\,(10\,((10 \cdot 20 + 1) \bmod 26) + 5)$ div $26 +$
$10^0\,(10\,((10\,((10 \cdot 20 + 1) \bmod 26) + 5) \bmod 26) + 2)$ div $26 +$
$(10^0\,(10\,((10\,((10 \cdot 20 + 1) \bmod 26) + 5) \bmod 26) + 2) \bmod 26) / 26 =$

$10^4\,(7)$ div $26 +$
$10^3 \cdot 2 +$
$10^2\,(201)$ div $26 +$
$10^1 \cdot 215$ div $26 +$
$10^0\,(10\,(215 \bmod 26) + 2)$ div $26 +$
$(10^0\,(10\,(215 \bmod 26) + 2) \bmod 26) / 26$

$215 \bmod 26 = 8$, dus $10\,(215 \bmod 26) + 2 = 82$, dus $(10\,(215 \bmod 26) + 2) \bmod 26 =$
$82 \bmod 26 = 2$ en $(10\,(215 \bmod 26) + 2)$ div $26 = 82$ div $26 = 3$

$10^4\,(7)$ div $26 +$
$10^3 \cdot 2 +$
$10^2\,(201)$ div $26 +$
$10^1 \cdot 215$ div $26 +$
$10^0\,(10\,(215 \bmod 26) + 2)$ div $26 +$
$(10^0\,(10\,(215 \bmod 26) + 2) \bmod 26) / 26 =$

$10^4\,(7)$ div $26 +$
$10^3 \cdot 2 +$
$10^2\,(201)$ div $26 +$
$10^1 \cdot 215$ div $26 +$
$10^0 \cdot 3 +$
$(10^0 \cdot 2) / 26$

$10^0 \cdot 3 = 3$
$10^0 \cdot 2 = 2$, dus $(10^0 \cdot 2) / 26 = 2 / 26 = 1/12$
215 div $26 = 7$, dus $10^1 \cdot 215$ div $26 = 70$
201 div $26 = 6$, dus $10^2\,(201)$ div $26 = 600$
$10^3 \cdot 2 = 2000$
7 div $26 = 0$, dus $10^4\,(7)$ div $26 = 0$

$10^4\,(7)$ div $26 +$
$10^3 \cdot 2 +$
$10^2\,(201)$ div $26 +$
$10^1 \cdot 215$ div $26 +$
$10^0 \cdot 3 +$
$(10^0 \cdot 2) / 26 =$

0 +
2000 +
600 +
70 +
3 +
1/12 =
2673 + 1/12

2.7.5 Breuken

Een breuk kan als kommagetal geschreven worden. In dit stuk wordt beschreven hoe een breuk als n-tallig kommagetal geschreven kan worden.

Bewijs

$$\frac{a}{b} = \frac{10a}{10b} = \frac{\frac{10a}{b}}{10} = \frac{(10a)\ div\ b + \frac{(10a)\ mod\ b}{b}}{10} = \frac{(10a)\ div\ b + \frac{10 \cdot (10a)\ mod\ b}{10b}}{10} =$$

$$\frac{(10a)\ div\ b + \frac{\frac{10 \cdot (10a)\ mod\ b}{b}}{10}}{10} = \frac{(10a)\ div\ b}{10} + \frac{\frac{10 \cdot (10a)\ mod\ b}{b}}{100} =$$

$$\frac{(10a)\ div\ b}{10} + \frac{(10 \cdot (10a)\ mod\ b)\ div\ b + \frac{(10 \cdot (10a)\ mod\ b)\ mod\ b}{b}}{100} =$$

$$\frac{(10a)\ div\ b}{10} + \frac{(10 \cdot (10a)\ mod\ b)\ div\ b}{100} + \frac{\frac{10 \cdot (10 \cdot (10a)\ mod\ b)\ mod\ b}{b}}{1000} =$$

$$\frac{(10a)\ div\ b}{10} + \frac{(10 \cdot (10a)\ mod\ b)\ div\ b}{100} +$$
$$\frac{(10 \cdot (10 \cdot (10a)\ mod\ b)\ mod\ b)\ div\ b + \frac{((10 \cdot (10 \cdot (10a)\ mod\ b))\ mod\ b)\ mod\ b}{b}}{1000} =$$

$$\frac{(10a)\ div\ b}{10} + \frac{(10 \cdot (10a)\ mod\ b)\ div\ b}{100} + \frac{(10 \cdot (10 \cdot (10a)\ mod\ b)\ mod\ b)\ div\ b}{1000} +$$
$$\frac{\frac{((10 \cdot (10 \cdot (10a)\ mod\ b))\ mod\ b)\ mod\ b}{b}}{1000} =$$

Dit kan oneindig lang herhaald worden. Als dit nog drie keer herhaald wordt, krijg je:

$$\frac{(10a)\ div\ b}{10} + \frac{(10 \cdot (10a)\ mod\ b)\ div\ b}{100} + \frac{(10 \cdot (10 \cdot (10a)\ mod\ b)\ mod\ b)\ div\ b}{1000} +$$
$$\frac{(10 \cdot (10 \cdot (10 \cdot (10a)\ mod\ b)\ mod\ b)\ mod\ b)\ div\ b}{10000} +$$
$$\frac{(10 \cdot (10 \cdot (10 \cdot (10 \cdot (10a)\ mod\ b)\ mod\ b)\ mod\ b)\ mod\ b)\ div\ b}{100000} +$$
$$\frac{(10 \cdot (10 \cdot (10 \cdot (10 \cdot (10 \cdot (10a)\ mod\ b)\ mod\ b)\ mod\ b)\ mod\ b)\ mod\ b)\ div\ b}{1000000} +$$
$$\frac{\frac{(10 \cdot (10 \cdot (10 \cdot (10 \cdot (10 \cdot (10a)\ mod\ b)\ mod\ b)\ mod\ b)\ mod\ b)\ mod\ b)\ mod\ b}{b}}{1000000}$$

Werkwijze

Bij de deelsom x / y is x de teller en y de noemer. Als x > y, wordt de breuk als x div y + (x mod y) / y geschreven en van (x mod y) / y wordt een nieuwe breuk gemaakt; a / b. b is hier gelijk aan y en a is gelijk aan x mod y. Nu geldt a < b. Wanneer a / b als kommagetal geschreven is, wordt x div y bij deze kommagetallen opgeteld. Wanneer geldt x < y, hoeft deze stap niet uitgevoerd te worden. x is hierbij gelijk aan a en y aan b in a / b.

Om een breuk a / b als kommagetal te schrijven, wordt eerst $\frac{(10a)\ div\ b}{10}$ berekend. Hiervoor wordt eerst a vermenigvuldigd met 10, dus er wordt een nul achter a geplaatst. Deze 10 is niet altijd gelijk aan 10_{10}, maar aan 10 in het gebruikte getallenstelsel. Vervolgens wordt steeds b van 10a afgetrokken. Hierbij moet goed opgelet worden dat er in het juiste getallenstelsel wordt gewerkt. Er wordt gekeken hoe vaak b van 10a kan worden afgetrokken zonder dat dit verschil negatief wordt. Dit aantal wordt 's_0' genoemd. s_0 is gelijk aan (10a) div b. In deze breuk $\frac{(10a)\ div\ b}{10}$ is s_0 de teller. Deze breuk wordt nu niet anders opgeschreven, maar blijft als s_0 / 10 staan. b is nu s_0 keer van 10a afgetrokken en wanneer hierbij een aantal overblijft, wordt dit t_0 genoemd. Het getal dat overblijft, dus t_0, wordt vermenigvuldigd met 10. Nu wordt precies hetzelfde gedaan als wat er bij de eerste stap gedaan werd; b telkens van de $10t_0$ afhalen, totdat er een getal tussen de 0 en b overblijft. Dit getal s_1 wordt weer op dezelfde manier als s_0 genoteerd, maar dan met als noemer 100. t_1 wordt gebruikt voor de volgende stap.

Wanneer een breuk als kommagetal geschreven wordt, is het kommagetal eindig, of oneindig met repeterende decimalen. $\frac{1}{2}_{10}$ is bijvoorbeeld een breuk die als eindig kommagetal geschreven kan worden. $\frac{1}{2}_{10}$ heeft namelijk maar 1 decimaal: 5. $\frac{1}{2}_{10}$ kan geschreven worden als $0{,}5_{10}$. $\frac{1}{3}_{10}$ daarentegen wordt decimaal geschreven als 0,33333…. Dit aantal drieën gaat oneindig door, maar het patroon (namelijk constant een drie) blijft zich herhalen. Deze eigenschap kan worden gebruikt om niet oneindig door te hoeven rekenen om de breuk te kunnen noteren.

Als $t_k = 0$, dan is de breuk eindig en kan de breuk opgeschreven worden als:

$s_0 / 10^1 + s_1 / 10^2 + s_2 / 10^3 + \ldots + s_{k-1} / 10^k$.

Dit is ontzettend makkelijk uit te rekenen en vervolgens om te schrijven naar een kommagetal.

Ook kan het voorkomen dat een waarde van t_k meerdere keren in een kommagetal voorkomt. $10t_k$ div b is dan weer precies hetzelfde als de eerste keer dat dit uitgerekend werd en $10t_k$ mod b is ook weer hetzelfde. De getallen zullen zich nu oneindig lang herhalen. We noemen de eerste keer dat je een bepaalde waarde van t tegenkwam t_n en de tweede keer t_p. De breuk is dan op te schrijven als

$$s_0 / 10^1 + s_1 / 10^2 + s_2 / 10^3 + \ldots + s_n / 10^{n+1} + \overline{s_{n+1} / 10^{n+2} \ldots + s_p / 10^{p+1}}$$

Hierin herhalen alleen de waardes van s. De machten van de noemers blijven continu met 1 groeien.

Voorbeeld

Als voorbeeld wordt $3\frac{1}{6}$ als kommagetal geschreven in een 8-tallig stelsel. Hiervoor wordt eerst $\frac{1}{6}{}_8$ uitgerekend en daarna wordt 3 bij het eindantwoord opgeteld.

1 = a en 6 = b. 10a = 10,
10 - 6 = 2, dus 10 div 6 = 1 = s_0 en 10 mod 6 = 2 = t_0.
$10t_0$ = 20.
20 - 6 = 12
12 - 6 = 4
20 div 6 = 2 = s_1 en 20 mod 6 = 4 = t_1
$10t_1$ = 40.
40 - 6 = 32
32 - 6 = 24
24 - 6 = 16
16 - 6 = 10
10 - 6 = 2
40 div 6 = 5 = s_2 en 40 mod 6 = 2 = t_2 = t_0

$\frac{1}{6}$ kan dus worden geschreven als een repeterende breuk.

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{5}{100000} + \frac{2}{1000000} + \ \dots$$

Het decimale getal is hier makkelijk van af te leiden, dit is gelijk aan

$$0,1\overline{2525}$$

Om $3\frac{1}{6}$ te krijgen, moeten er nog 3 bij opgeteld worden:

$$3,1\overline{2525}$$

2.8 Omschrijfmethode grondtal getallenstelsel

Het kan in de rest van dit verslag nodig zijn om getallen om te schrijven naar stelsels met een ander grondtal. Daarom wordt hiervoor een algemene werkwijze opgesteld.

Elk getal in een decimaal P2 stelsel is te schrijven als
$x_{\infty} \cdot 10^{\infty} + \ldots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0 + x_{-1} \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^2 + x_{-3} \cdot 10^{-3} + \ldots + x_{-\infty} \cdot 10^{-\infty}$

Hierbij worden ook de decimalen van het getal meegenomen, omdat ook kommagetallen moeten kunnen worden omgeschreven naar een getal met een ander grondtal.

B wordt het grondtal van een getallenstelsel genoemd.

Deze schrijfwijze is in een decimaal stelsel, dus bij elke 10 in het getal zou een 10 rechtsonder geplaatst kunnen worden.

$x_{\infty} \cdot {10_{10}}^{\infty} + \ldots + x_3 \cdot {10_{10}}^3 + x_2 \cdot {10_{10}}^2 + x_1 \cdot {10_{10}}^1 + x_0 \cdot {10_{10}}^0$
$+ x_{-1} \cdot {10_{10}}^{-1} + x_{-2} \cdot {10_{10}}^{-2} + x_{-3} \cdot {10_{10}}^{-3} \ldots + x_{-\infty} \cdot {10_{10}}^{-\infty}$

$10_{10} \rightarrow (10_B - (B - 10_{10}))_B \Rightarrow (10_B + 10_{10} - B))_B$

$x_{\infty} \cdot 10_B + 10_{10} - B))_B{}^{\infty} + \ldots + x_3 \cdot (10_B + 10_{10} - B))_B{}^3 + x_2 \cdot (10_B + 10_{10} - B))_B{}^2 + x_1 \cdot (10_B + 10_{10} - B))_B{}^1 +$
$x_0 \cdot (10_B + 10_{10} - B))_B{}^0 + x_{-1} \cdot (10_B + 10_{10} - B))_B{}^{-1} + x_{-2} \cdot (10_B + 10_{10} - B))_B{}^{-2} +$
$x_{-3} \cdot (10_B + 10_{10} - B))_B{}^{-3} \ldots + x_{-\infty} \cdot (10_B + 10_{10} - B))_B{}^{-\infty}$

De uitkomst van deze som is je getal in een B-tallig stelsel.

Het is handig als getallen in een B-tallig stelsel ook terug naar een decimaal stelsel kunnen worden omgeschreven.

$y_{\infty} \cdot {10_B}^{\infty} + \ldots + y_3 \cdot {10_B}^3 + y_2 \cdot {10_B}^2 + y_1 \cdot {10_B}^1 + y_0 \cdot {10_B}^0$
$+ y_{-1} \cdot {10_B}^{-1} + y_{-2} \cdot {10_B}^{-2} + y_{-3} \cdot {10_B}^{-3} \ldots + y_{-\infty} \cdot {10_B}^{-\infty}$

$10_B \rightarrow B_{10}$

$y_{\infty} \cdot {B_{10}}^{\infty} + \ldots + y_3 \cdot {B_{10}}^3 + y_2 \cdot {B_{10}}^2 + y_1 \cdot {B_{10}}^1 + y_0 \cdot {B_{10}}^0$
$+ y_{-1} \cdot {B_{10}}^{-1} + y_{-2} \cdot {B_{10}}^{-2} + y_{-3} \cdot {B_{10}}^{-3} \ldots + y_{-\infty} \cdot {B_{10}}^{-\infty}$

De uitkomst van deze som is gelijk aan:

$x_{\infty} \cdot {10_{10}}^{\infty} + \ldots + x_3 \cdot {10_{10}}^3 + x_2 \cdot {10_{10}}^2 + x_1 \cdot {10_{10}}^1 + x_0 \cdot {10_{10}}^0$
$+ x_{-1} \cdot {10_{10}}^{-1} + x_{-2} \cdot {10_{10}}^{-2} + x_{-3} \cdot {10_{10}}^{-3} \ldots + x_{-\infty} \cdot {10_{10}}^{-\infty}$

Voorbeeld

56_{10} wordt omgezet naar een 13-tallig stelsel.
$56_{10} = 5 \cdot 10_{10}{}^{1} + 6 \cdot 10_{10}{}^{0}$

B = 13

De 3 getallen die in dit 13-tallige stelsel zijn toegevoegd worden respectievelijk a, b en c genoemd.

$10_{10} \rightarrow (10_B + 10_{10} - B))_B = (10_{13} + 10_{10} - 13))_{13} = a_{13}$

$5 \cdot a_{13}{}^{1} + 6 \cdot a_{13}{}^{0} = 44$

$56_{10} = 44_{13}$

Vervolgens wordt dit teruggeschreven.

$44_{13} = 4 \cdot 10_{13}{}^{1} + 4 \cdot 10_{13}{}^{0}$

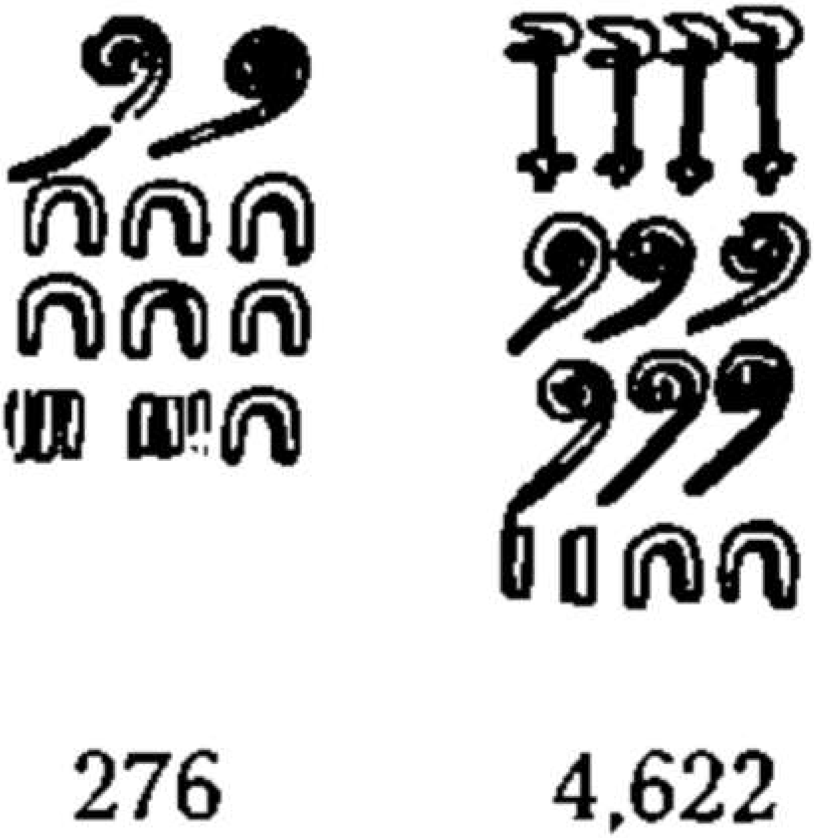
$10_B \rightarrow B_{10}$

$4 \cdot B^1 + 4 \cdot B^0 = 4 \cdot 13^1 + 4 \cdot 13^0 = 56 = x_\infty \cdot 10_{10}{}^{\infty} + \ldots + x_3 \cdot 10_{10}{}^{3} + x_2 \cdot 10_{10}{}^{2} + x_1 \cdot 10_{10}{}^{1} + x_0 \cdot 10_{10}{}^{0}$

56 is nu dus omgeschreven van een decimaal getallenstelsel naar een 13-tallig stelsel, en daarna weer terug naar een decimaal stelsel.

Hoofdstuk 3

De problemen bij de verschillende getallenstelsels



[29]

Hierboven is de notatie van 276 en 4.622 in Egyptische hiërogliefen te zien. Dit is één van de vele manieren waarop deze getallen genoteerd kunnen worden. Zoals te zien is, is de notatie van de getallen op de Egyptische manier veel langer dan de decimale manier. In dit hoofdstuk wordt onder andere besproken hoe de notatie van getallen beïnvloed wordt door het gebruikte stelsel.

[29] Tucker, T. (2019). *plunder tallies on the Annals of Thutmosis III* [Illustratie]. https://observablehq.com/@tophtucker/egyptian-numerals. https://observablehq.com/@tophtucker/egyptian-numerals

3.1 Introductie

In dit hoofdstuk worden de nadelen van bepaalde getallenstelsels besproken. Er wordt hierbij onderscheid gemaakt tussen het type stelsel en de grootte van het grondtal dat gebruikt wordt.

In het vorige hoofdstuk zijn rekenregels opgesteld voor type A1 en P2 stelsels. Eerst worden twee rekenvoorbeelden gegeven, één in een type A1 stelsel en één in een type P2 stelsel. Deze berekeningen dienen als voorbeeld van een eenvoudige en een minder eenvoudige notatie. Dan wordt de notatie van getallen in verschillende soorten getallenstelsels besproken, waarbij ook de rekenvoorbeelden betrokken worden. Welke soort stelsel gebruikt wordt bepaalt hoe eenvoudig de notatie van getallen is. Daarom is het belangrijk dat de notatie in elk type stelsel besproken wordt. Zo kan er een goed ondersteunde keuze gemaakt worden voor welk type stelsel gebruikt wordt.

De onderzoeksmethode die in dit hoofdstuk gebruikt wordt is onder andere het vergelijken van notaties van dezelfde getallen in de verschillende stelsels. Daarbij wordt aangegeven waarom bepaalde stelsels niet handig zijn, en waarom sommige juist wel handig zijn. Ook worden bepaalde eigenschappen van stelsels die niet gunstig zijn besproken. Welk stelsel het beste is hangt echter erg af van welk getal er genoteerd moet worden. Er zijn bepaalde getallen die het best in een bepaald stelsel kunnen worden genoteerd. Dit betekent niet dat dit stelsel altijd de beste notatie heeft. Er wordt dus gekeken naar welk stelsel het vaakst een goede notatie heeft, en vooral bij getallen die in de wiskunde en het dagelijks leven veel gebruikt worden, niet bij één getal.

Daarna wordt gekeken naar de grootte van het grondtal. Dit staat grotendeels los van het type stelsel dat gebruikt wordt. De grootte van het grondtal is belangrijk omdat dit de eenvoud van berekeningen beïnvloedt. Niet alleen het type stelsel dat gebruikt heeft invloed op de notatie van getallen, ook het grondtal heeft hier invloed op. Daarnaast is de deelbaarheid van het grondtal belangrijk. Een grote deelbaarheid kan berekeningen makkelijker maken.

3.2 Berekeningen

3.2.1 Berekening in type A1 stelsel

In het vorige hoofdstuk werden voorbeelden gegeven bij de opgestelde rekenregels. De getallen die in deze voorbeelden werden gebruikt waren relatief klein. Wanneer berekeningen gedaan worden met grotere getallen, kan dit tot erg lange berekeningen leiden. Ook was het grondtal dat bij de additieve berekeningen gebruikt werd 5, wat een relatief klein grondtal is. Grotere grondtallen leiden tot lange berekeningen.

Neem bijvoorbeeld de som $543_{10} \cdot 1398_{10}$. Deze wordt berekend in een 17-tallig, type A1 stelsel met de tekens α, λ, ζ, τ en κ;

$\alpha = 17^0$
$\lambda = 17^1$
$\zeta = 17^2$
$\tau = 17^3$
$\kappa = 17^4$

Voor nul wordt de Arabische nul (0) gebruikt. De som $543_{10} \cdot 1398_{10}$ is dus te schrijven als
ζλλλλλ λλλλλ λλλλααααα ααααα ααααα α · ζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλαααα

Deze som wordt berekend volgens de methode die in hoofdstuk 2 is beschreven. Er worden spaties geplaatst tussen de tekens wanneer er meer dan 5 van dezelfde tekens voorkomen zodat de getallen overzichtelijker zijn.

Eerst wordt de tabel met machten van 2 gemaakt. In de rechterkolom worden deze machten met het kleinste getal in de som vermenigvuldigt, oftewel ζζλααααα ααααα ααααα.

Tabel 30: Machten van 2 en $2^k \cdot 543$

2^k decimaal	**2^k**	**$2^k \cdot 543$**
2^0	α	ζλλλλλ λλλλλ λλλλααααα ααααα ααααα α
2^1	αα	ζζζλλλλλ λλλλλ λλααααα ααααα ααααα
2^2	αααα	ζζζζζ ζζλλλλλ λλλααααα ααααα ααα
2^3	ααααα ααα	ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζααααα αααα
2^4	ααααα ααααα ααααα α	τζζζζζ ζζζζζ ζζζλα
2^5	λααααα ααααα ααααα	ττζζζζζ ζζζζλλαα

2^6	λλλααααα ααααα ααα	ττττт ττζλλλλαααα
2^7	λλλλλ λλααααα ααααα α	ττττт ττττт ττττζζλλλλλ λλλααααα ααα
2^8	λλλλλ λλλλλ λλλλλα	κτττττ ττττт τζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααααα α
2^9	ζλλλλλ λλλλλ λλλαα	κκκτττττζζζζζ ζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααααα
2^{10}	ζζζλλλλλ λλλλαααα	κκκκκ κτττττ ττττт τζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααα

De berekeningen die nodig zijn geweest om tabel 30 te maken zijn:

- $2^0 \cdot 543$

2^0 = α

α · ζλλλλλ λλλλλ λλλλααααα ααααα ααααα α = ζλλλλλ λλλλλ λλλλααααα ααααα ααααα α

- $2^1 \cdot 543$

2^1 = α + α = αα

αα · ζλλλλλ λλλλλ λλλλααααα ααααα ααααα α
= ζλλλλλ λλλλλ λλλλααααα ααααα ααααα α + ζλλλλλ λλλλλ λλλλααααα ααααα ααααα α
= ζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλαααααα ααααα ααααα ααααα ααααα ααααα αα
= ζζζλλλλλ λλλλλ λλαααααα ααααα ααααα

- $2^2 \cdot 543$

2^2 = αα + αα = αααα

αααα · ζλλλλλ λλλλλ λλλλααααα ααααα ααααα α
= ζζζλλλλλ λλλλλ λλαααααα ααααα ααααα + ζζζλλλλλ λλλλλ λλαααααα ααααα ααααα
= ζζζζζ ζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλ ααααα ααααα ααααα ααααα ααααα ααααα
= ζζζζζ ζζλλλλλ λλαααααα ααααα ααααα ααααα ααααα ααααα
= ζζζζζ ζζλλλλλ λλλααααα ααααα ααα

- $2^3 \cdot 543$

2^3 = αααα + αααα = ααααα ααα

ααααα ααα · ζλλλλλ λλλλλ λλλλααααα ααααα ααααα α
= ζζζζζ ζζλλλλλ λλλααααα ααααα ααα + ζζζζζ ζζλλλλλ λλλααααα ααααα ααα
= ζζζζζ ζζζζζ ζζζζ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααααα ααααα ααααα α

= ζζζζζ ζζζζζ ζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λλααααα αααα
= ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ααααα αααα

- $2^4 \cdot 543$

2^4 = ααααα ααα + ααααα ααα = ααααα ααααα ααααα α

ααααα ααααα ααααα α · ζλλλλ λλλλλ λλλααααα ααααα ααααα α
= ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ααααα αααα + ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ααααα αααα
= ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ααααα ααααα ααααα ααα
= ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζλα
= τζζζζζ ζζζζζ ζζζλα

- $2^5 \cdot 543$

2^5 = ααααα ααααα ααααα α + ααααα ααααα ααααα α = λααααα ααααα ααααα

λααααα ααααα ααααα · ζλλλλ λλλλλ λλλααααα ααααα ααααα α
= τζζζζζ ζζζζζ ζζζλα + τζζζζζ ζζζζζ ζζζλα
= ττζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζλλαα
= τττζζζζζ ζζζζλλαα

- $2^6 \cdot 543$

2^6 = λααααα ααααα ααααα + λααααα ααααα ααααα = λλλααααα ααααα ααα

λλλααααα ααααα ααα · ζλλλλ λλλλλ λλλααααα ααααα ααααα α
= τττζζζζζ ζζζζλλαα + τττζζζζζ ζζζζλλαα
= τττττ τζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζλλλαααα
= τττττ ττζλλλαααα

- $2^7 \cdot 543$

2^7 = λλλααααα ααααα ααα + λλλααααα ααααα ααα = λλλλλ λααααα ααααα ααααα ααααα ααααα α
= λλλλλ λλααααα αααα

λλλλλ λλααααα αααα · ζλλλλ λλλλλ λλλααααα ααααα ααααα α
= τττττ ττζλλλαααα + τττττ ττζλλλαααα
= τττττ τττττ ττττζζλλλλλ λλλααααα ααα

- $2^8 \cdot 543$

2^8 = λλλλλ λλααααα αααα + λλλλλ λλααααα αααα = λλλλλ λλλλλ λλλλ ααααα ααααα ααααα ααα
= λλλλλ λλλλλ λλλλλα

λλλλλ λλλλλ λλλλλα · ζλλλλ λλλλ λλλααααα ααααα ααααα α
= τττττ τττττ ττττζζλλλλλ λλλααααα ααα + τττττ τττττ ττττζζλλλλλ λλλααααα ααα
= τττττ τττττ τττττ τττττ τττττ τττζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααααα α

= κττττττ ττττττ τζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααααα α

- $2^9 \cdot 543$

2^9 = λλλλλ λλλλλ λλλλλα + λλλλλ λλλλλ λλλλλα = λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλαα = ζλλλλλ λλλλλ λλλαα

ζλλλλλ λλλλλ λλλαα · ζλλλλλ λλλλλ λλλλααααα ααααα ααααα α
= κττττττ ττττττ τζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααααα α + κττττττ ττττττ τζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααααα α
= κκττττττ ττττττ ττττττ ττττττ ττζζζζζ ζζζλλλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλααααα ααααα ααααα ααααα ααααα ααααα αα
= κκττττττ ττττττ ττττττ ττττττ ττζζζζζ ζζζλλλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλαααααα ααααα ααααα
= κκττττττ ττττττ ττττττ ττττττ ττζζζζζ ζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααααα
= κκκττττττζζζζζ ζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααααα

- $2^{10} \cdot 543$

2^{10} = ζλλλλλ λλλλλ λλλαα + ζλλλλλ λλλλλ λλλαα = ζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λαααα = ζζζλλλλλ λλλλαααα

ζζζλλλλλ λλλλαααα · ζλλλλλ λλλλλ λλλλααααα ααααα ααααα α
= κκκττττττζζζζζ ζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααααα + κκκττττττζζζζζ ζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααααα
= κκκκκ κττττττ ττττττζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζλλλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλααααα ααααα ααααα ααααα ααααα ααααα
= κκκκκ κττττττ ττττττζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζλλλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλααααα ααααα ααα
= κκκκκ κττττττ ττττττζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααα
= κκκκκ κττττττ ττττττ τζζλλλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααα

- $2^{11} \cdot 543$

2^{11} = ζζζλλλλλ λλλλαααα + ζζζλλλλλ λλλλαααα = ζζζζζ ζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλααααα ααα
= ζζζζζ ζζλααααα ααα

ζζζζζ ζζλααααα ααα > ζλλλλλ λλλλλ λλλλααααα ααααα ααααα α dus de tabel hoeft maar tot 2^{10} aangevuld te worden.

Zoals te zien is kost het redelijk veel werk om de tabel te maken. Ook zijn de getallen die ontstaan lang en onoverzichtelijk.

Nu wordt er gekeken welke machten van 2 samen op ζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλαααα (1395) uitkomen.

Hiervoor wordt telkens de grootste macht van 2 van ζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλαααα afgetrokken. De macht van 2 moet groter dan of gelijk aan het getal waar het van af wordt afgetrokken zijn.

- ζζζλλλλλ λλλλαααα (2^{10})

ζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλα - ζζζλλλλλ λλλλαααα
=ζλλλλλ λλλλλ λλλλα - λλλλλ λλλλαααα
=ζλλλλλα - αααα
= ζλλλλααααα ααααα ααααα ααα - αααα = ζλλλλααααα ααααα αααα

ζλλλλλ λλλλλ λλλαα (2^9) > ζλλλλααααα ααααα αααα
λλλλλ λλλλλ λλλλλα (2^8) < ζλλλλααααα ααααα αααα en dus kan 2^8 van ζλλλλααααα ααααα αααα afgetrokken worden.

- λλλλλ λλλλλ λλλλλα (2^8)

ζλλλλααααα ααααα αααα - λλλλλ λλλλλ λλλλλα
= ζλλλλααααα ααααα ααα - λλλλλ λλλλλ λλλλλ
= λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααα - λλλλλ λλλλλ λλλλλ = λλλλλ λααααα ααααα ααα

λλλλλ λλααααα ααααα α (2^7) > λλλλλ λααααα ααααα ααα
λλλααααα ααααα ααα (2^6) < λλλλλ λααααα ααααα ααα

- λλλααααα ααααα ααα (2^6)

λλλλλ λααααα ααααα ααα - λλλααααα ααααα ααα
= λλλααααα ααααα ααα - ααααα ααααα ααα
= λλλ

λααααα ααααα ααααα (2^5) < λλλ

- λααααα ααααα ααααα (2^5)

λλλ - λααααα ααααα ααααα
= λλ - ααααα ααααα ααααα
= λααααα ααααα ααααα αα - ααααα ααααα ααααα
= λαα

ααααα ααααα ααααα α (2^4) < λαα

- αααα ααααα ααααα α (2^4)

λαα - ααααα ααααα ααααα α
= ααααα ααααα ααααα αααα - ααααα ααααα ααααα α = ααα
ααααα ααα (2^3) > ααα

αααα (2^2) > ααα
αα (2^1) < ααα

- αα (2^1)

ααα - αα = α

α (2^0) = α

- α (2^0)

α - α = 0

Nu worden alle gebruikte machten van 2 vermenigvuldigd met ζλλλλλ λλλλλ λλλααααα ααααα ααααα α (543) en bij elkaar opgeteld. De vermenigvuldigingen van 2 met 533 staan al in de tabel.

De gebruikte machten van 2 waren ζζζλλλλλ λλλαααα (2^{10}), λλλλλ λλλλλ λλλλλα (2^8), λλλααααα ααααα ααα (2^6), λααααα ααααα ααααα (2^5), ααααα ααααα ααααα α (2^4), αα (2^1) en α (2^0).

ζζζλλλλλ λλλαααα · ζλλλλλ λλλλλ λλλααααα ααααα ααααα α = κκκκκ κτττττ τττττ τζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααα

λλλλλ λλλλλ λλλλλα · ζλλλλλ λλλλ λλλααααα ααααα ααααα α = κτττττ τττττ τζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααααα α

λλλααααα ααααα ααα · ζλλλλλ λλλλλ λλλααααα ααααα ααααα α = ττττт ττζλλλαααα

λααααα ααααα ααααα · ζλλλλλ λλλλλ λλλααααα ααααα ααααα α = τττζζζζζ ζζζζλλαα

ααααα ααααα ααααα α · ζλλλλλ λλλλλ λλλααααα ααααα ααααα α = τζζζζζ ζζζζζ ζζζλα

αα · ζλλλλλ λλλλλ λλλααααα ααααα ααααα α = ζζζλλλλλ λλλλλ λλααααα ααααα ααααα

α · ζλλλλλ λλλλλ λλλααααα ααααα ααααα α = ζλλλλλ λλλλλ λλλααααα ααααα ααααα α

Dit bij elkaar optellen geeft:

κκκκκ κτττττ τττττ τζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααα + κτττττ τττττ τζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λααααα ααααα ααααα α + ττττт ττζλλλαααα + τττζζζζζ ζζζζλλαα + τζζζζζ ζζζζζ ζζζλα + ζζζλλλλλ λλλλλ λλααααα ααααα ααααα + ζλλλλλ λλλλλ λλλααααα ααααα ααααα α

= κκκκκ κκτττττ τττττ τττττ τττττ τττττ τττττ τττζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλααααα ααααα ααααα ααααα ααααα ααααα ααααα ααααα ααααα ααααα ααααα ααααα ααααα αα

(Hierin komt κ 7 keer voor, τ 33 keer, ζ 33 keer, λ 65 keer en α 67 keer)
= κκκκκ κκτττττ τττττ τττττ τττττ τττττ τττττ τττζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζλλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλλλ λλλααααα ααααα ααααα α

= κκκκκ κκττττττ τττττ τττττ τττττ τττττ τττττ τττζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζ ζζζζζζ ζααααα ααααα ααααα α

= κκκκκ κκττττττ τττττ τττττ τττττ τττττ τττττ τττττζζζααααα ααααα ααααα α

= κκκκκ κκκκτζζζααααα ααααα ααααα α

Het antwoord op de som ζλλλλλ λλλλλ λλλλααααα ααααα ααααα α · ζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλαααα is κκκκκ κκκκτζζζααααα ααααα ααααα α ($543_{10} \cdot 1395_{10} = 75748_{10}$)

Er zijn dus enorm veel berekeningen nodig om een relatief simpele som te doen. Ook is de notatie van de som 543 · 1395 = 75748 veel langer in dit stelsel (ζλλλλλ λλλλλ λλλλααααα ααααα ααααα α · ζζζζλλλλλ λλλλλ λλλλαααα = κκκκκ κκκκτζζζααααα ααααα ααααα α), terwijl de gekozen tekens relatief simpel zijn. Als bijvoorbeeld de Egyptische hiërogliefen zouden worden gebruikt, zouden de getallen nog veel moeilijker te noteren zijn.

3.2.2 Berekening in type P2 stelsel

Nu wordt de som $543_{10} \cdot 1395_{10} = 75748_{10}$ berekend volgens de manier die in hoofdstuk 2 beschreven is voor type P2 stelsels. Hierbij wordt een decimaal stelsel gebruikt, zodat de waarde van de gebruikte getallen gelijk is aan de waarde van de getallen die gebruikt werden bij de berekening in het type A1 stelsel.

543 > 1395 dus 1395 wordt bovenaan gezet en x genoemd, 543 wordt y genoemd. x_0 en y_0 worden met elkaar vermenigvuldigt; 3 · 5 = 5 + 5 + 5 = 15. Het getal dat ontstaat heet z. Omdat het antwoord van $x_0 \cdot y_0$ meer dan 2 cijfers heeft, wordt z_1 onder x_1 geplaatst, en z_0 onder x_0.

```
1395
 543
--------x
   15
```

Dan worden x_0 en y_1 met elkaar vermenigvuldigt en onder z geplaatst.
$4 \cdot 10^1 \cdot 5 = (4 + 4 + 4 + 4 + 4) \cdot 10^1 = 20 \cdot 10^1 = 2 \cdot 10^2$

```
1395
 543
--------x
   15
  200
```

Nu worden y_2 en x_0 met elkaar vermenigvuldigd.
$5 \cdot 10^2 \cdot 5 = (5 + 5 + 5 + 5 + 5) \cdot 10^2 = 25 \cdot 10^2$

```
1395
  543
--------x
     15
   200
 2500
```

Dan worden x_1, x_2 en x_3 ook met elk cijfer in y vermenigvuldigd.

$x_1 \cdot y_0 = 9 \cdot 10^1 \cdot 3 = (9 + 9 + 9) \cdot 10^1 = 27 \cdot 10^1$

```
1395
  543
--------x
     15
   200
 2500
   270
```

$x_1 \cdot y_1 = 9 \cdot 10^1 \cdot 4 \cdot 10^1 = (9 \cdot 4) \cdot 10^2 = (9 + 9 + 9 + 9) \cdot 10^2 = 36 \cdot 10^2$

```
1395
  543
--------x
     15
   200
 2500
   270
  3600
```

$x_1 \cdot y_2 = 9 \cdot 10^1 \cdot 5 \cdot 10^2 = (9 \cdot 5) \cdot 10^3 = (9 + 9 + 9 + 9 + 9) \cdot 10^3 = 45 \cdot 10^3$

```
1395
  543
--------x
     15
   200
 2500
   270
 3600
45000
```

$x_2 \cdot y_0 = 3 \cdot 10^2 \cdot 3 = (3 + 3 + 3) \cdot 10^2 = 9 \cdot 10^2$

```
1395
  543
--------x
     15
   200
 2500
   270
 3600
45000
    900
```

$x_2 \cdot y_1 = 3 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^1 = (3 \cdot 4) \cdot 10^3 = (4 + 4 + 4) \cdot 10^3 = 12 \cdot 10^3$

```
1395
  543
--------x
     15
   200
 2500
   270
 3600
45000
    900
12000
```

$x_2 \cdot y_2 = 3 \cdot 10^2$ c $5 \cdot 10^2 = (3 \cdot 5) \cdot 10^4 = (5 + 5 + 5) \cdot 10^4 = 15 \cdot 10^4$

```
    1395
      543
  --------x
         15
       200
     2500
       270
     3600
   45000
       900
   12000
150000
```

$x_3 \cdot y_0 = 1 \cdot 10^3 \cdot 3 = 3 \cdot 10^3$

```
  1395
   543
--------x
    15
   200
  2500
   270
  3600
 45000
   900
 12000
150000
  3000
```

$x_3 \cdot y_1 = 1 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^1 = 4 \cdot 10^4$

```
  1395
   543
--------x
    15
   200
  2500
   270
  3600
 45000
   900
 12000
150000
  3000
 40000
```

$x_3 \cdot y_2 = 1 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^2 = 5 \cdot 10^5$

```
   1395
    543
 --------x
     15
    200
   2500
    270
   3600
  45000
    900
  12000
 150000
   3000
  40000
 500000
```

Nu worden alle getallen onder de streep bij elkaar opgeteld volgens de methode die in hoofdstuk 2 is beschreven.

```
     15
    200
   2500
    270
   3600
  45000
    900
  12000
 150000
   3000
  40000
 500000
----------+
```

Deze som wordt in een tabel uitgevoerd omdat dat overzichtelijker is.

Tabel 31: Optelsom

1	1	2	0	0	
z_5	z_4	z_3	z_2	z_1	z_0
				1	5
			2	0	0
		2	5	0	0
			2	7	0

		3	6	0	0
	4	5	0	0	0
			9	0	0
	1	2	0	0	0
1	5	0	0	0	0
		3	0	0	0
	4	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
-	-	-	-	-	+
7	5	7	4	8	5

543 · 1395 is dus 757485

De lengte van de berekening is bij beide sommen ongeveer gelijk. De lengte van de berekening hangt wel af van de gebruikte methode, die bij deze berekeningen verschilt. Toch is de berekening in het positionele stelsel eenvoudiger. Dit komt vooral doordat de notatie van de getallen eenvoudiger is en de berekeningen meer intuïtief gedaan kunnen worden. Dit laatste komt onder andere doordat de gebruikte cijfers bij het positionele stelsel tegenwoordig veel gebruikt worden en dus herkenbaar zijn. Ook is het gebruikte stelsel decimaal. Wanneer echter een type P2 stelsel gebruikt wordt, met andere cijfers dan de Arabische cijfers en een ander grondtal dan 10, zouden de berekeningen in dit type P2 stelsel niet altijd intuïtief zijn.

Daarnaast moet er opgemerkt worden dat er bij de berekening in het type A1 stelsel een 17-tallig stelsel is gebruikt, waardoor niet alleen de type stelsels, maar ook de grondtallen met elkaar vergeleken worden. Om een betere vergelijking te maken zouden de berekeningen in een stelsel met een gelijk grondtal moeten worden gedaan, waarbij de waardes van de gebruikte getallen gelijk is.

3.3 Notatie

Een eenvoudige notatie van een getal kan berekeningen makkelijker maken. Elk getal moet namelijk tijdens een berekening genoteerd worden, wat erg lang kan duren wanneer de notatie van getallen ingewikkeld is. Ook is het belangrijk dat de getallen overzichtelijk zijn, zodat de waarde van het getal makkelijk af te lezen. Uit de rekenvoorbeelden hierboven blijkt dat een eenvoudige notatie de berekeningen veel makkelijker maakt.

Er zijn een aantal factoren die invloed hebben op hoe eenvoudig de notatie van een getal is. Zo kunnen de tekens die gebruikt worden een getal vereenvoudigen. Ook is de lengte van een getal van belang. Beide factoren worden beïnvloed door het stelsel dat wordt gebruikt.

Een voorbeeld van een stelsel waarbij de tekens de berekeningen juist minder makkelijk maken is dat van de Egyptenaren. De hiëroglyfen zijn decoratief, wat het lastiger maakt om ze te noteren. De cijfers die bij de rekenvoorbeelden, oftewel Griekse letters en de Arabische cijfers, zijn juist goede voorbeelden van simpele cijfers, die de notatie van getallen vereenvoudigen.

3.3.1 Additieve stelsels

De lengte van getallen wordt bepaalt door het gebruikte stelsel. $543_{10} \cdot 1395_{10} = 75748_{10}$ is bijvoorbeeld een veel kortere notatie dan ζλλλλ λλλλλ λλλαaaaa ααααα ααααα α · ζζζζλλλλ λλλλλ λλλαααα = κκκκκ κκκκτζζζααααα ααααα ααααα α.

De reden dat lange getallen onhandig zijn voor berekeningen, is onder andere dat ze onoverzichtelijk zijn. Neem bijvoorbeeld 999 in een decimaal, type A1 stelsel, waarbij a staat voor 10^0, b voor 10^1 en c voor 10^2. De notatie zou dan aaaaaaaaabbbbbbbbbccccccccc zijn, wat aanzienlijk langer is dan 999.
Het getal aaaaaaaaabbbbbbbbbccccccccc zou omgeschreven kunnen worden naar $9 \cdot a + 9 \cdot b + 9 \cdot c$, waardoor het gelijk veel duidelijker wordt welke cijfers in het getal voorkomen, maar dat is een heel andere notatie dan de notatie die bij het stelsel hoort.

Type A2

Het probleem van te lange getallen in een type A1 stelsel wordt gedeeltelijk opgelost wanneer een type A2 stelsel wordt gebruikt. De Romeinse notatie voor 8, VIII, is veel overzichtelijker dan de notatie van 8 in het Romeinse stelsel wanneer dit een type A1 stelsel zou zijn, namelijk IIIIIIII. Toch is 8 een veel eenvoudigere notatie dan VIII. Met een klein getal als 8, is de notatie in het Romeinse stelsel nog redelijk overzichtelijk. Wanneer echter een ander stelsel wordt gebruikt, met een grondtal groter dan 10 en hierin een relatief groot getal genoteerd wordt, kan dit een erg lang getal worden. Neem bijvoorbeeld een dertig-tallig stelsel, met de volgende tekens:

$a = 30^0$
$b = 15 \cdot 30^0$
$c = 30^1$
$d = 15 \cdot 30^1$
$e = 30^2$

$f = 15 \cdot 30^3$
$g = 30^3$

28_{10} zou als baaaaaaaaaaaaa geschreven worden. 2828_{10} zou geschreven worden als eeeccccaaaaaaaa, en 282828_{10} als gggggggggeeeeeeeeeeeeeeeccccccccbaaa. Deze decimale getallen zouden in een dertig-tallig positioneel stelsel bijvoorbeeld genoteerd kunnen worden door middel van transcriptie. 28 zou dan nog steeds 28 zijn. 2828 zou als 03,04,08 genoteerd worden en 282828 als 10,14,07,18. Deze notaties zijn veel korter en overzichtelijker dan de notatie in het type A2 stelsel.

Type A3

De notatie van getallen is in een type A3 stelsel net zo kort en overzichtelijk als in een type P2 stelsel. In een type A3 stelsel zijn tekens voor de cijfers a^n, $2 \cdot a^n$, $3 \cdot a^n$, …, $(a - 1) \cdot a^n$. Als in een dergelijk stelsel, met grondtal 10, bijvoorbeeld a voor $9 \cdot 10^0$ staat, b voor $9 \cdot 10^1$ en c voor $9 \cdot 10^2$, is de notatie van 999 in dit stelsel abc (de volgorde van de cijfers is niet van belang). Deze notatie is net zo kort als 999. Het probleem is echter dat er extreem veel cijfers nodig zijn in een type A3 stelsel. Voor elke eenheid is een cijfer nodig, maar ook voor elke macht van het grondtal keer de eenheden. Dit is niet nadelig voor de berekeningen in dit stelsel, maar al deze cijfers moeten ook onthouden worden, of in een tabel erbij gehouden worden, wat natuurlijk niet gunstig is. In een type P2 stelsel zijn alleen maar cijfers voor de eenheden nodig.

Daarnaast kan een getal in een type P2 stelsel oneindig verlengt worden door meer cijfers aan het getal toe te voegen. Bij een type A3 stelsel kan dit in theorie ook, alleen moeten er dan oneindig veel nieuwe cijfers gemaakt worden, wat niet realistisch is. Een andere optie is om in een type A3 stelsel maar een bepaalde hoeveelheid tekens te creëren, en de rest van de cijfers additief samen te stellen. Hierdoor wordt eigenlijk dus een mengeling tussen een type A1 en A3 stelsel gebruikt. Doordat de getallen weer volgens de regels van een type A1 stelsel worden samengesteld, komen de nadelen van dit stelsel ook terug, namelijk, de lengte en onoverzichtelijkheid van getallen.

Grondtal

De lengte van getallen in elk additief stelsel hangt ook af van het gekozen grondtal. Wanneer het grondtal klein is, zullen de cijfers vaak korter zijn dan in een stelsel met een groter grondtal. Neem bijvoorbeeld een vijf-tallig type A1 stelsel met de tekens:

$a = 5^0$
$b = 5^1$
$c = 5^2$

En een 20-tallig stelsel met de tekens:

$d = 20^0$
$e = 20^1$
$f = 20^2$

17_{10} zou in het vijftallige stelsel genoteerd worden als bbbaa. In het twintigtallige stelsel zou het genoteerd worden als ddddddddddddddddd, wat veel onoverzichtelijker is dan bbbaa. Een ander voorbeeld is 53_{10}. Dit zou worden genoteerd als $ccaaa_5$ en $eeddddddddddddd_{20}$. Bij kleinere getallen is het handiger om een klein grondtal te hebben, omdat de getallen daardoor korter worden.

Het nadeel dat kleine grondtallen echter met zich meebrengen, is dat er meer cijfers nodig zijn om getallen uit te drukken. Het grootste getal dat in het 20-tallige stelsel uitgedrukt kan worden, door alleen de tekens d, e en f te gebruiken is 7999_{10}; $19 \cdot 20^0 + 19 \cdot 20^1 + 19 \cdot 20^2 = 7999$. Hierbij wordt ervan uitgegaan dat er in dit stelsel nog meer tekens zijn, ook één voor 20^2, en elk cijfer dus maximaal 19 keer in een getal kan voorkomen. Het grootste getal dat in het 5-tallige stelsel kan worden weergegeven met de tekens a, b en c is $4 \cdot 5^0 + 4 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^2 = 124_{10}$. Om het getal 7999_{10} in het vijf-tallige stelsel weer te geven, moeten er nog drie extra cijfers zijn; één voor 5^3, één voor 5^4 en één voor 5^5, want $2 \cdot 5^5 + 2 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 7999_{10}$. Dit getal kan ook met minder verschillende cijfers worden weergegeven, bijvoorbeeld door $2 \cdot 5^5$ als $10 \cdot 5^4$ weer te geven, maar er wordt hierbij ervan uitgegaan dat er grotere cijfers zijn dan 5^5, en elk cijfer dus maar 4 keer in een getal kan voorkomen.

Kleine grondtallen in een additief stelsel hebben dus als voordeel dat getallen vaak korter zijn, maar als nadeel dat er meer cijfers nodig zijn om getallen weer te geven dan in een stelsel met een groot grondtal.

Grote getallen

Extreem grote getallen kunnen in een positioneel stelsel worden weergegeven door middel van machten, bijvoorbeeld ${10^{42}}_{10}$. Deze notatiewijze werd bij additieve stelsels vroeger niet toegepast, maar kan wel gebruikt worden. 10^{42} wordt een erg groot getal in een additief stelsel waarbij geen cijfer is voor 10^{42}, of een cijfer dat daarbij in de buurt komt. In het Romeinse stelsel bijvoorbeeld, is de waarde van het grootste cijfer (M) gelijk aan 1.000. 10^{42} zou dus genoteerd worden als 10^{39} keer M, wat niet een realistisch getal is. 10^{42} kan in het romeinse stelsel ook genoteerd worden als X^{XLII}.

Daarnaast zijn er ook andere manieren om grote additieve getallen te noteren. Zo gebruikten de Romeinen een vinculum of twee rechte haken om aan te geven dat een getal met 1.000 vermenigvuldigt werd.

Eindige cijfers

Een probleem dat in elk type additief stelsel voorkomt, is dat de hoeveelheid cijfers eindig is. Er zijn een bepaald aantal cijfers en grotere cijfers moeten additief weergegeven worden, of door middel van methodes als machten. Wanneer bijvoorbeeld a^k het grootste cijfer is in een type A1 stelsel, met a als grondtal, moeten voor getallen waar meerdere keren a^k in voorkomt, meerdere keren a^k worden genoteerd. Dit is tot op zekere hoogte geen probleem, maar kan tot extreem lange getallen lijden. Neem een type A1 stelsel met tekens voor 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 en 10^6. Het decimale 10.000.000.000, ook te noteren als 10^{10}, zou in dit stelsel genoteerd worden door 10^4 keer het teken van 10^6, wat een erg lang en onoverzichtelijk getal is. Er kunnen natuurlijk extra getallen aan het stelsel toegevoegd worden, maar dit kan ook niet oneindig veel gedaan worden, waardoor extreem grote getallen heel veel cijfers krijgen. Bij positionele getallen, kunnen er oneindig veel eenheden aan een getal worden toegevoegd, waardoor het getal groter wordt. Daardoor kunnen extreem grote getallen in een positioneel stelsel eenvoudig worden weergegeven, zonder de noodzaak voor nieuwe cijfers.

De methode van machten om grote getallen weer te geven, werkt alleen bij getallen die een macht zijn van één van de cijfers die in het stelsel voorkomen. Er is bijvoorbeeld geen macht van een cijfer uit het Romeinse stelsel die op 8.000.000.000.000.000 uitkomt. Dit getal zou kunnen worden weergegeven door 8 keer 1.000.000.000.000.000 op te schrijven; X^{XV} X^{XV} X^{XV} X^{XV} X^{XV} X^{XV} X^{XV} X^{XV}.

Door middel van machten kunnen dus meer cijfers gecreëerd worden, wanneer deze cijfers origineel niet in het stelsel voorkomen. Toch beperkt dit wel de notatie van getallen. Wanneer bijvoorbeeld de macht groter is dan het grootste cijfer in het stelsel, moet er of een lang getal in de macht staan, of er moet een macht in de macht geschreven worden. Wanneer deze macht weer groter is dan het grootste cijfer in het stelsel, moet er een macht op deze macht geplaatst worden. Dit kan erg onoverzichtelijk worden.

3.3.2 Hybride stelsels

Een hybride stelsel maakt vaak de notatie van getallen korter dan de notatie in een additief stelsel. Toch is de notatie in hybride stelsels niet ideaal.

Type H1

In een type H1 stelsel waren cijfers voor a^0, a^1, a^2, …, a^k met a als grondtal en $a \in \mathbb{N}$. Wanneer de n in a^n 0 of 1 is, worden meervouden van het grondtal weergegeven door middel van de regels van een type A1 stelsel, waarbij de nadelen van dit type stelsel ook voorkomen. Wanneer geldt $n \geq 2$ en $n \in \mathbb{N}$, dan worden hoeveelheden weergegeven door $(1 + 1 + \ldots + 1) \cdot a^n$. Dit vereenvoudigt de notatie niet altijd. 900 bijvoorbeeld, zou in een decimaal type A1 stelsel, waarbij a staat voor 10^2, kunnen worden weergegeven door aaaaaaaaa. In een type H1 stelsel kan dit worden weergegeven als $(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot 10^2$. Deze notatie is niet erg eenvoudig, en getallen waarin veel verschillende cijfers voorkomen kunnen in dit stelsel erg lang worden. Neem bijvoorbeeld 789.342_{10}. In een decimaal type H1 stelsel zou dit genoteerd kunnen worden als $(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot 10^5 + (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot 10^4 + (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot 10^3 + (1 + 1 + 1) \cdot 10^2 + 10^1 + 10^1 + 10^1 + 10^1 + 10^0 + 10^0$. De positionele notatie van dit getal is veel overzichtelijker.

Ook beperkt het grootste cijfer in een type H1 stelsel de notatie van grotere getallen enorm. Wanneer bijvoorbeeld $10^6{}_{10}$ de waarde is van het grootste cijfer, en er een groter getal dan 10^6 genoteerd moet worden, kan dit getal erg lang worden. Wanneer 10^8 genoteerd moet worden, zou dat geschreven worden als (+ 1) · 10^6, waarbij 100 keer 1 in $(1 + 1 + 1 + \ldots + 1)$ voorkomt. Dit getal is natuurlijk extreem onhandig om mee te rekenen. Het probleem van de notatie van grote getallen wordt gedeeltelijk opgelost door een type H2 stelsel te gebruiken.

Type H2

Dit type stelsel lijkt heel erg op een type H1 stelsel. De tekens in een type H1 stelsel zijn a^0, a^1, a^2, …, a^k met a als grondtal en $a \in \mathbb{N}$. In een type H2 stelsel konden getallen echter ook als $(a + a + \ldots + a) \cdot a^n$ met a^2 als grondtal, $n \geq 2$ en $n \in \mathbb{N}$ weergegeven worden. Dit is gunstig, omdat een cijfer $(1 + 1 + \ldots + 1) \cdot a^n$ (type H1), waarbij $1 + 1 + \ldots + 1$ gelijk is aan een meervoud van a, $1 + 1 + \ldots + 1$ veel korter genoteerd kan worden in een type H2 stelsel. Neem bijvoorbeeld een type H2 stelsel met grondtal 100 waarbij cijfers voor 10^0, 10^1, 10^2 en 10^3 zijn. $40 \cdot 10^3$ (decimaal) zou in dit stelsel genoteerd worden als $(10 + 10 + 10 + 10) \cdot 10^3$. Dit getal zou in een type H1 stelsel met cijfers voor 10^0, 10^1, 10^2 en 10^3 genoteerd worden als $(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot 10^3$. De notatie in het type H2 stelsel is duidelijk veel overzichtelijker dan dat in het type H1 stelsel. Toch zijn er eenvoudigere notaties voor dit getal. De waarde is gelijk aan 40.000 (decimaal, positioneel). In een honderd-tallig, type P2 stelsel zou dit getal genoteerd kunnen worden door middel van transcriptie; 04,00,00.

Ook het getal dat bij type H1 werd genoteerd (10^8) kan ook makkelijker geschreven worden in een type H2 stelsel. Dit getal zou namelijk geschreven worden als $(10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10) \cdot 10^6$. Dit is nog steeds een onhandig getal, maar al een stuk overzichtelijker dan de notatie in een type H1 stelsel.

Type H3 en H4

Bij een type H3 stelsel zijn cijfers voor:

$1, 2, 3, \ldots, (a - 1)$
$a, 2 \cdot a, 3 \cdot a, \ldots, (a - 1) \cdot a$
$a^2, a^3, \ldots a^k$

Met a als grondtal, $a \in \mathbb{N}$ en $k \in \mathbb{N}$. Meervouden van $a^2, a^3, \ldots a^k$ worden weergegeven door middel van vermenigvuldigen $(1 \cdot a^2, 2 \cdot a^2, 3 \cdot a^2 \ldots)$.

Bij een type H4 stelsel zijn er cijfers voor:

$1, 2, 3, \ldots, (a - 1)$
$a^1, a^2, a^3, \ldots a^k$

Met a als grondtal, $a \in \mathbb{N}$ en $k \in \mathbb{N}$. Meervouden van $a^1, a^2, a^3, \ldots a^k$ worden weergegeven door middel van vermenigvuldigen.

De notatie van cijfers tot en met a^2 kan eenvoudiger zijn in een type H3 stelsel. Bij dit type stelsel zijn namelijk aparte tekens voor elk cijfer tot en met a^2. Hierdoor kunnen deze cijfers door 1 cijfer weergegeven worden. Bij een type H4 stelsel wordt dit gedaan door middel van vermenigvuldigen, wat tot iets langere getallen leidt. De grootte van het grondtal bepaald echter of het handig is om in een type H3 stelsel te rekenen. Bij een type H4 stelsel zijn namelijk alleen tekens voor 1 tot en met (a - 1), en de machten van het grondtal a. Bij een type H3 stelsel zijn er ook nog tekens voor $a, 2 \cdot a, 3 \cdot a, \ldots, (a - 1) \cdot a$, die uit het het hoofd geleerd moeten worden, of in een tabel erbij gehouden moeten worden wanneer er berekeningen worden gedaan. Hoe groter a is, des te meer extra tekens er zijn in een type H3 stelsel in vergelijking met een H4 stelsel. Als het grondtal relatief klein is, is dit niet direct een probleem, maar bij grote grondtallen zullen er veel extra cijfers zijn in type H3 stelsel.

De notatiewijze van cijfers in type H3 en H4 stelsels lijkt erg op de notatie in H1 en H2. Cijfers worden weergegeven door een macht van het grondtal met een eenheid te vermenigvuldigen (met uitzondering van de cijfers a, $2 \cdot a$, $3 \cdot a$, …, $(a - 1) \cdot a$ in H3 stelsels, daar zijn aparte tekens voor).
Bij H1 en H2 stelsels zijn er echter geen cijfers voor de eenheden. De eenheden worden hierbij additief weergegeven. In dat opzicht zijn H3 en H4 stelsel dus efficiënter dan H1 en H2 stelsels. Bij H3 en H4 stelsels zijn wel aparte cijfers voor de eenheden, en hoeven deze dus niet additief weergegeven te worden, wat de notatie van getallen veel korter maakt.

Neem bijvoorbeeld het getal 88_{10}. Dit wordt in elk type hybride stelsel weergegeven. De stelsels zijn decimaal. Er zouden hierbij hoogstwaarschijnlijk andere cijfers zijn voor de eenheden en het grondtal 10 gebruikt worden, maar dat wordt bij deze voorbeelden niet gebruikt omdat het zo ook duidelijk is hoe de getallen genoteerd zouden worden.

H1 en H2: $10^1 + 10^1 + 10^1 + 10^1 + 10^1 + 10^1 + 10^1 + 10^1 + 10^0 + 10^0 + 10^0 + 10^0 + 10^0 + 10^0 + 10^0 + 10^0$

H3: $80 + 8$

H4: $8 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

8888_{10} zou worden weergegeven als:

H1 en H2: $(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot 10^3 + (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot 10^2 + (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot 10^1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

H3: $8 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + a + 8$ (waarbij a voor 80_{10} staat)

H4: $8 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 8$

Bij deze getallen is dus de notatie in een H3 stelsel het eenvoudigst. Hierbij moet echter wel onthouden worden dat dit type stelsel nadelen met zich meebrengt. Dat deze notatie voor deze getallen eenvoudiger is, betekent dus niet dat een H3 stelsel altijd het handigst is, vooral vanwege de extra cijfers die onthouden moeten worden bij dit type stelsel. In dat opzicht, is een type H4 stelsel het handigste hybride stelsel.

Een type H4 stelsel lijkt erg op een type P2 stelsel. Het verschil is echter dat de waarde van cijfers in een P2 bepaald worden door de positie van de cijfers, terwijl de waarde van cijfers bij een H1 stelsel niet afhangt van de positie. Getallen in een type H4 stelsel zijn dan ook additief samengesteld. Het getal 8234 in een decimaal type P2 stelsel zou in een decimaal type H4 stelsel geschreven worden als $8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4$. De volgorde van de cijfers maakt niet uit, dus het kan ook geschreven worden als bijvoorbeeld $3 \cdot 10^1 + 4 + 8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2$. De notatie 8234 is korter dan $8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4$, en dus handiger om te gebruiken bij berekeningen.

Eindige cijfers

Net als bij de additieve stelsels, komt het probleem van eindige cijfers voor bij de hybride stelsels. In elk van de hybride stelsels zijn er cijfers voor a^0, a^1, a^2, …, a^k met a als grondtal en $a \in \mathbb{N}$. De manier waarop meervouden van de machten van het grondtal worden weergegeven verschilt alleen. Bij elk van de stelsels is het echter zo dat a^k de grootste macht van het grondtal is waarvoor een cijfer is. Wanneer a^k meerdere keren moet worden weergegeven, wordt dat gedaan door het aantal keer dat a^k in het getal met a^k te vermenigvuldigen. Wanneer een getal extreem veel groter is dan a^k, moet het getal waarmee a^k wordt vermenigvuldigt extreem groot zijn. Een voorbeeld hiervan was al gegeven bij de problemen van een type H1 stelsel. Hierbij hoefde a^k (10^6) maar 100 keer weergegeven worden. Het kan echter zo zijn dat a^k nog veel vaker moet worden weergegeven, wat tot onhandige cijfers kan leiden. Om grote getallen weer te geven, kunnen ook cijfer gecreëerd worden met een grotere waarde. Dit is echter niet altijd handig, want dan moeten er heel veel extra cijfers gemaakt worden, die allemaal onthouden moeten worden.

Bij positionele getallen komt dit probleem niet voor. Een plaats van een cijfer in een positioneel getal geeft aan met welke macht van het grondtal het cijfer vermenigvuldigt moet worden. Omdat er oneindig veel plaatsen zijn, zijn er oneindig veel machten waarmee de cijfers vermenigvuldigd kunnen worden. Hiervoor hoeft geen apart teken voor de macht van het grondtal te zijn, dit wordt alleen bepaalt door de plaats van het cijfer. In een positioneel stelsel kunnen dus oneindig grote getallen weergegeven worden. Dit kan bij hybride en additieve stelsels in theorie ook, maar dan moeten er of oneindig veel cijfers gecreëerd worden, of oneindig lange getallen gebruikt worden.

3.3.3 Positionele stelsels

De notatie van getallen in positionele stelsels is veel gunstiger dan de notatie in additieve en hybride stelsels. Dit komt vooral doordat de lengte van getallen veel korter is. Een getal in een type H4 stelsel is bijvoorbeeld bijna gelijk aan een getal in een positioneel stelsel. De machten van het grondtal waarmee de cijfers vermenigvuldigt worden, hoeven bij een positioneel stelsel echter niet genoteerd te worden wat deze getallen veel korter maakt. Toch zijn er ook nadelen bij het gebruiken van een positionele stelsel.

Nul

Wanneer er geen nul in een positioneel stelsel voorkomt, is het bijna onmogelijk om berekeningen te doen. De nul dient als plaatshouder in een positioneel getal. Het decimale 804_{10} staat bijvoorbeeld voor $8 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$. Als er geen nul zou zijn geweest, zou het getal 804 als 84 genoteerd worden, wat ook te lezen is als $8 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$. Bij het oude stelsel van de Babyloniërs was er geen nul. De waarde van een cijfer in een getal moest af te leiden zijn uit de context van het getal. Wanneer er geen nul in een stelsel is, kunnen getallen meerdere waardes hebben, wat natuurlijk niet ideaal is.

Type P1

Het grootste probleem bij dit type stelsel, is dat de cijfers additief samengesteld worden. Hierdoor kunnen de cijfers langer worden, en de getallen dus ook. In principe is dit geen groot probleem, en kan met een type P1 stelsel redelijk berekeningen gedaan worden. De cijfers van de Babyloniërs, de Chinese geleerden en de Mayaanse priesters zijn bijvoorbeeld redelijk kort, en dus is de notatie van getallen in deze stelsels redelijk overzichtelijk. Een vereiste voor het gebruiken van een type P1 stelsel is echter wel dat er een 0 in het stelsel aanwezig is.

Type P2

In vergelijking met de eerder genoemde stelsels, is de notatie van getallen in een type P2 stelsel extreem efficiënt. De getallen zijn kort en overzichtelijk (in het algemeen) en dus is hier gemakkelijk mee te rekenen. Toch zijn hier ook uitzonderingen op.

Zo moeten er in een type P2 stelsel cijfers zijn voor alle cijfers tot en met het grondtal (inclusief 0). Bij bijvoorbeeld een 60-tallig stelsel, moeten er 60 cijfers zijn. Zoals al eerder aangegeven is, is het onhandig om veel cijfers te hebben. In dit opzicht is een type P1 stelsel dus handiger wanneer het grondtal groot is. Hierbij kunnen grote cijfers worden weergegeven door middel van additie, en hoeven er dus niet veel cijfers onthouden te worden. Toch is dit niet ideaal want bij erg grote additieve cijfers komen de problemen van additieve stelsels terug, zoals lange, onoverzichtelijke cijfers. Ook kan het probleem worden opgelost door de getallen in transcriptie te noteren.

Daarnaast kunnen getallen in een type P2 stelsel alsnog erg lang zijn. Zo is $1.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000_{10}$ een erg lang getal, waarvan niet in één oogopslag de waarde gelezen kan worden. Dit getal is ook te noteren als 10^{42}, maar dat is niet de manier waarop dit getal volgens de regels van een type P2 stelsel genoteerd wordt. Deze manier van omschrijven is ook niet mogelijk wanneer er naast de nullen en het meest linker cijfer (in dit geval de nul) nog andere cijfers voorkomen. $1.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.999_{10}$ is bijvoorbeeld niet in één getal te noteren zoals 10^{42}. Het zou genoteerd kunnen worden als $10^{42} + 999$, maar dan is het niet meer één getal. Het is voor berekeningen niet direct een probleem dat het getal nu uit twee getallen bestaat, maar het toont wel aan dat de originele notatie in het stelsel niet handig was voor het getal. Het getal moest eerst omgeschreven worden.

Bij extreem grote getallen is een type H3 stelsel handiger. Het hierboven genoemde getal zou in een dergelijk stelsel als $10^{42} + 99 + 9 \cdot 100$ geschreven worden. Dit wordt gezien als één getal. Het is langer dan $10^{42} + 999$, maar het is wel relatief kort en het is één getal. Hieruit blijkt dat de notatie van dit getal handiger is een type H3 stelsel.

Het voorbeeld van 10^{42} is echter een extreem voorbeeld. Er wordt vaak met kleinere getallen gerekend, waarbij de notatie in een type P2 stelsel efficiënter is dan de notatie in andere stelsels. Wanneer er veel verschillende cijfers in een groot getal voorkomen is de notatie in een type P2 stelsel handiger dan de notatie in een type H3 stelsel. Het positionele $433.568.363.039.371.039.820_{10}$ is bijvoorbeeld een eenvoudigere notatie dan $4 \cdot 10^{20} + 3 \cdot 10^{19} + 3 \cdot 10^{18} + 5 \cdot 10^{17} + 6 \cdot 10^{16} + 8 \cdot 10^{15} +$

$3 \cdot 10^{14} + 6 \cdot 10^{13} + 3 \cdot 10^{12} + 3 \cdot 10^{10} + 9 \cdot 10^{9} + 3 \cdot 10^{8} + 7 \cdot 10^{7} + 1 \cdot 10^{6} + 3 \cdot 10^{4} + 9 \cdot 10^{3} + 8 \cdot 10^{2} + 20$, wat de notatie voor dit getal is in een type P2 stelsel.

Omdat een type P1 stelsel hetzelfde werkt als een type P2 stelsel, maar alleen de cijfers anders samengesteld worden, komen de problemen van een type P2 stelsel ook terug in een P1 stelsel.

3.3.4 Conclusie

De notatie van getallen is van groot belang voor hoe eenvoudig berekeningen zijn. De notatie wordt bepaald door welk stelsel er wordt gebruikt. De notatie van getallen in additieve en hybride stelsels is minder efficiënt dan de notatie in positionele stelsels. Dit komt vooral doordat de cijfers in additieve en hybride stelsels vaak lang en onoverzichtelijk zijn. Ook is de verzameling cijfers in een additief of hybride stelsel eindig, waardoor extreem grote getallen lastig weer te geven zijn. Dit is niet het geval bij positionele stelsels. De meest eenvoudige notatie is in een positioneel stelsel

Het verschil tussen een type P1 en type P2 stelsel is de cijfers die gebruikt worden. De cijfers in een type P1 stelsel zijn additief, wat niet altijd gunstig is. Dit kan gunstig zijn bij een groot grondtal, maar bij een groot grondtal kan ook de transcriptie notatiewijze gebruikt worden. Dit kan makkelijker zijn dan de cijfers additief samenstellen, omdat hiervoor gewoon de Arabische cijfers kunnen worden gebruikt. Al met al is het duidelijk dat de notatie in een positioneel stelsel het meest efficiënt is, maar nog niet welk grondtal het beste is om berekeningen mee te doen. Dit wordt ook onderzocht in dit hoofdstuk. Hierbij zal een type P2 stelsel gebruikt worden, omdat dan de Arabische cijfers gebruikt kunnen worden.

3.4 Grondtal

3.4.1 Grootte

De grootte van het grondtal is heel belangrijk voor de eenvoudigheid van berekeningen. Er kan bijvoorbeeld een type P2 stelsel worden gebruikt met een relatief groot grondtal, bijvoorbeeld 300, met 300 verschillende cijfers. Het decimale getal 284 kan dan als één symbool worden opgeschreven. Het nadeel hiervan is dat je 300 symbolen uit je hoofd moet leren. Dit is ontzettend moeilijk uit je hoofd te leren en voor kinderen op school is dit al helemaal een onmogelijke opgave. Een oplossing voor dit probleem is dat de getallen in transcriptie gezet kunnen worden.

Het andere uiteinde is een getallenstelsel creëren met heel weinig cijfers, zoals het binaire stelsel. Hier hoef je maar 2 cijfers uit je hoofd te leren en kan elk getal worden opgeschreven met maar 2 cijfers. Hier is het nadeel dat de getallen ontzettend snel erg lang worden. Zo wordt 284 geschreven als $2 \cdot 10^8 + 0 \cdot 10^7 + 0 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$ wat binair geschreven wordt als 100011100. 284, wat in het decimale getallenstelsel geschreven kan worden met 3 cijfers, wordt in het binaire stelsel geschreven met 9 cijfers. Dit is een groot verschil. Een getallenstelsel met heel weinig cijfers is ook niet optimaal. Hier moet een balans tussen worden gevonden.

Het is dus van belang dat het grondtal niet te klein of groot is. Om het probleem van veel cijfers bij een groot grondtal op te lossen kan er een type P1 stelsel gebruikt worden, met additieve cijfers, of kunnen de getallen in transcriptie gezet worden.

Wanneer een type P1 stelsel gebruikt wordt, worden de cijfers additief samengesteld. Voor deze additieve cijfers wordt een ander grondtal gebruikt dan het grondtal van het stelsel waarin gerekend wordt. Het stelsel van de Babyloniërs is bijvoorbeeld zestigtallig, maar de cijfers worden decimaal samengesteld. Wanneer berekeningen met getallen kleiner dan zestig wordt gedaan in dit stelsel, wordt er dus eigenlijk een additief decimaal stelsel gebruikt en niet een positioneel zestigtallig stelsel. Hoe groter het grondtal, hoe eerder dit een probleem is.

Hetzelfde geldt voor getallen in transcriptie. De algemeen gebruikte notatie voor cijfers in transcriptie is decimaal. Bij berekeningen met getallen kleiner dan het grondtal wordt dus eigenlijk gewoon in een decimaal stelsel gerekend. Er kan voor gekozen worden om de cijfers in transcriptie met een ander grondtal dan 10 te noteren wanneer blijkt dat een ander grondtal gunstiger is. Wanneer bijvoorbeeld blijkt dat een 4-tallig stelsel gunstiger is dan een decimaal stelsel, worden de cijfers volgens een 4-tallig stelsel samengesteld. De getallen worden dan echter niet volgens een 4-tallig stelsel samengesteld, maar met het veel grotere, gunstigere grondtal. Wanneer bijvoorbeeld blijkt dat 120 een goed deelbaar grondtal is en 4 ook handiger is dan 10, kunnen de getallen volgens een 120-tallig stelsel worden samengesteld, en de cijfers volgens een 4-tallig stelsel. Een voorbeeld is 13,32,102. Dit staat voor $13_4 \cdot 120^2 + 32_4 \cdot 120^1 + 102_4 \cdot 120^0$. Het kan echter verwarrend zijn om met getallen te rekenen die met twee nieuwe, onbekende grondtallen samengesteld zijn. Het is dus wel een mogelijkheid om dit systeem te gebruiken, maar het is moeilijk aan te leren omdat het een compleet nieuw systeem is, en daarom is het onhandig om het te gebruiken.

3.4.2 Deelbaarheid

Ook is de deelbaarheid van het grondtal erg belangrijk. De deelbaarheid is van belang voor de eenvoudigheid van berekeningen. Sommige grondtallen hebben een kleine deelbaarheid. Zo is 7_{10} een priemgetal en is dus alleen deelbaar door 1 en 7. Als 7 het grondtal van een getallenstelsel wordt, is 10_7 dus alleen deelbaar door 10_7 en 1_7. Dit maakt delen erg moeilijk in het dagelijks leven omdat er veel kommagetallen of breuken ontstaan bij deelsommen. 10 is dan al een iets beter grondtal, omdat 10 deelbaar is door 10, 5, 2 en 1.

Goede grondtallen lijken alle faculteiten van de getallen, dus 1!, 2!, 3! enzovoort. De faculteiten van de de eerste 6 cijfers van ons decimale getallenstelsel zijn 1, 2, 6, 24, 120 en 720. 120 is bijvoorbeeld onder andere deelbaar door 1, 2, 3, 4, 5 en 6. Dit is ontzettend handig met delen. 120 is echter een veel te groot grondtal. Het gevolg van een te groot grondtal is eerder beschreven.

In tabel 32 is een aantal grondtallen te zien (x) in de eerste rij en in de eerste kolom een aantal getallen (y). Dit zijn de getallen uitgaande van een 15-tallig stelsel. a is hier 9 + 1, b is 9 + 2 en 10 is hier 9 + 6. Bij een 7-tallig stelsel is de 7 eigenlijk gelijk aan 10, maar voor het gemak is dit een zeven. Er wordt gekeken naar de quotiënt x / y van deze getallen. Bij grondtal x zijn de getallen groter dan x zwart gemaakt, omdat dit altijd getallen zijn met decimalen, want als z > 0 en x is een positief grondtal, dan geldt x / (x + z) < 1.

Tabel 32: Quotiënten van een aantal grondtallen

y \ x	4	7	10	12	15
1	4	7	10	12	15
2	2	$3,\overline{33}$	5	6	$7,\overline{77}$
3	$1,\overline{111}$	$2,\overline{22}$	$3,\overline{33}$	4	5
4	1	$1,\overline{51}$	$2,5$	3	$3,\overline{b3}$
5		$1,\overline{2541}$	2	$2,\overline{4972}$	3
6		$1,\overline{11}$	$1,\overline{66}$	2	$2,\overline{77}$
7		1	$1,\overline{428571}$	$1,\overline{86a351}$	$2,\overline{22}$
8			$1,25$	$1,6$	$1,\overline{d1}$
9			$1,\overline{11}$	$1,4$	$1,a$
a			1	$1,\overline{2497}$	$1,\overline{77}$
b				$1,\overline{11}$	$1,\overline{5641}$
c				1	$1,\overline{3b}$
d					$1,\overline{24936dc}$

	[redacted]	$\overline{a5b81}$
e		$1,\overline{11}$
10		1

In deze tabel is de deelbaarheid van de grondtallen 4, 7, 10, 12 en 15 weergegeven. De berekeningen zijn gedaan volgens de regels beschreven in hoofdstuk 2. Als naar de kolom met het grondtal 15 wordt gekeken, is te zien dat 10 van de 15 breuken oneindige repeterende breuken zijn. Dit is natuurlijk niet handig. Als dit grondtal gebruikt zou worden en je zou 1 koekje willen delen, zouden beide personen 0,7777… van het koekje krijgen. Met het grondtal dat wij hebben, krijgt iedereen 0,5 van het koekje, wat veel makkelijker is. In het alledaags leven zijn kommagetallen vaak niet handig. Ook bij berekeningen is het makkelijker om met zo weinig mogelijk kommagetallen te hoeven werken.

Het verschil tussen het grondtal 10 en 12 is dat bij het grondtal van 10, 4 van de 10 breuken oneindige repeterende breuken zijn, 2 van de 10 zijn eindige breuken en 4 van de 10 zijn hele getallen en bij het grondtal 12 zijn 4 van de 12 breuken oneindige repeterende breuken, 2 van de 12 eindige breuken en 6 van de 12 hele getallen. Ook zijn de getallen waar het meest door gedeeld wordt; 2, 3, en 4, wel delers van 12 en niet van 10. Als er gekeken wordt naar deling is 12 een handiger grondtal dan 10. Bij het grondtal 4 is maar één van de uitkomsten een kommagetal. Dit kommagetal is een eindige breuk. 4 zou dus in dit opzicht ook een geschikt grondtal zijn. Het grondtal 4 is echter relatief klein waardoor getallen snel erg lang worden.

Bij deze tabel zijn maar voor een paar grondtallen de quotiënten gegeven, omdat het veel tijd kost om deze berekeningen te doen. In het volgende hoofdstuk zal worden besproken welke grondtallen goed deelbaar zijn. Het is namelijk niet realistisch dat er voor elk mogelijke grondtal de berekeningen worden gedaan die gedaan zijn voor deze tabel. Dat zou te veel tijd kosten.

3.5 Speciale getallenstelsels

Tot nu toe is in dit verslag ervan uitgegaan dat een grondtal altijd een geheel, positief getal is. Dit hoeft echter niet het geval te zijn. Er zijn een aantal speciale soorten grondtallen en cijfers die voor aparte getallenstelsels zorgen.

Zo kan ervoor gekozen worden om een kommagetal of breuk als grondtal te gebruiken. Wanneer er een breuk of eindig kommagetal gebruikt wordt, zullen getallen vaak ook een kommagetal of breuk zijn. Er is al aangegeven dat het niet handig is om met kommagetallen of breuken te rekenen als dit ook ontweken kan worden en dus is het niet handig om een eindig kommagetal of breuk als grondtal te gebruiken. Bij oneindige kommagetallen als grondtal komt hetzelfde probleem voor. Hier komt echter nog een probleem bij; de totale waarde van een getal kan nooit exact berekend worden. De waarde van het grondtal is namelijk niet precies bekend, en dus kan de waarde van een getal niet bepaald worden.

Ook kan een één-tallig stelsel gebruikt worden, dus met grondtal 1. Hierdoor kan echter geen positioneel stelsel gebruikt worden. Er zijn namelijk alleen maar de cijfers 1 en 0. 101_1 is gelijk aan $1 \cdot 1^2 + 0 \cdot 1^1 + 1 \cdot 1^0 = 1 + 0 + 1$, wat gelijk is aan de additieve waarde van 101. 11_1, 10001_1 en 10100_1 hebben ook allemaal de waarde 1 + 1. De waarde van een getal wordt niet bepaald door de plaats van een cijfer in een getal. Er wordt dus eigenlijk een type A1 stelsel gebruikt. Dit is een erg onhandig stelsel omdat grote getallen met extreem veel cijfers moet worden genoteerd. 100_{10} zou bijvoorbeeld worden genoteerd door 100 keer een 1 te schrijven.

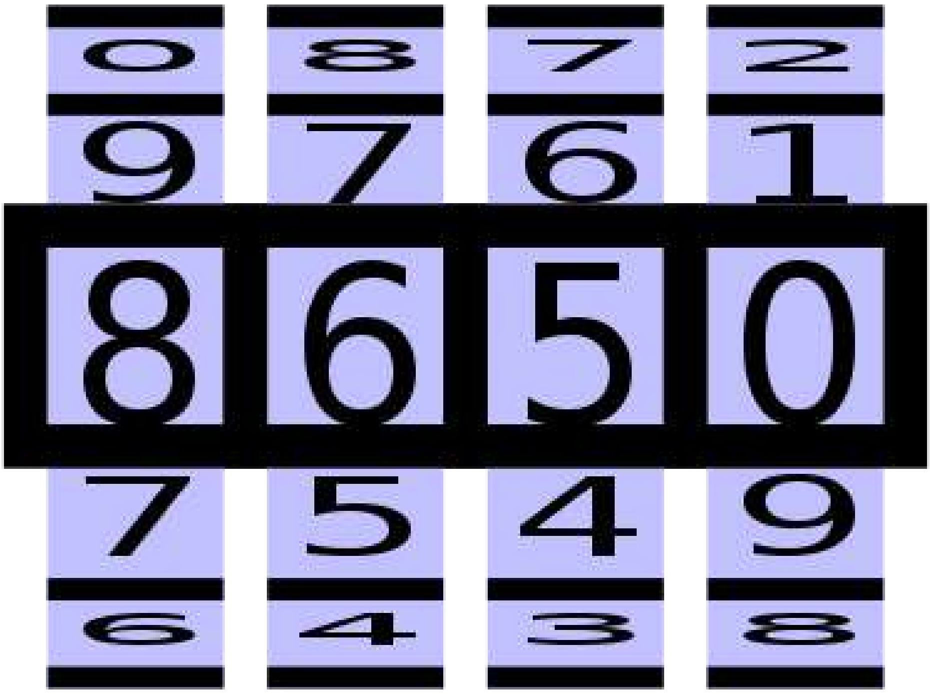
Er zijn ook andere speciale stelsels, bijvoorbeeld stelsels met een negatief grondtal. Hierbij zijn de machten van het grondtal afwisselend positief en negatief. Het negadecimale 12.243 staat voor $1 \cdot (-10)^4 + 2 \cdot (-10)^3 + 2 \cdot (-10)^2 + 4 \cdot (-10)^1 + 3 \cdot (-10)^0$, wat decimaal gelijk is aan 8.163. Het decimale -8.163 zou negadecimaal geschreven worden als 9.977. Een voordeel van negatieve grondtallen is dat negatieve getallen geschreven kunnen worden zonder een minteken voor het getal. [2.3]

Ook zijn er getallenstelsels met imaginaire grondtallen. Een voorbeeld is het quater imaginaire stelsel dat in 1960 door Donald Knuth voorgesteld werd. Het grondtal van dit stelsel is 2i. Met dit stelsel kan ongeveer elk complexe getal weergegeven worden met alleen de cijfers 0, 1, 2 en 3. Een voorbeeld van een getal in dit stelsel is 1101_{2i}. Dit is decimaal gelijk aan $1 \cdot (2i)^3 + 2 \cdot (2i)^2 + 3 \cdot (2i)^1 + 4 \cdot (2i)^0 = -8i - 4 + 0 + 1 = -8i - 3$. [2.4]

Daarnaast zijn er getallenstelsels waarbij zowel positieve als negatieve cijfers gebruikt worden. Een voorbeeld is het gebalanceerde ternaire stelsel. Het grondtal van dit stelsel is 3 en de waardes van cijfers die worden gebruikt zijn -1, 0 en 1. Neem bijvoorbeeld een cijfer z = -1. Dan zou het getal z01z staan voor $-1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + -1 \cdot 3^0 = - 27 + 0 + 3 - 1 = -25_{10}$ [2.5]

De laatste drie getallenstelsels hebben elk nuttige toepassingen en voordelen, maar zijn iets ingewikkelder dan de getallenstelsels die tot nu toe besproken zijn, met natuurlijke cijfers en grondtallen. Omdat het getallenstelsel breed toepasbaar moet zijn, en niet alleen op één gebied goed te gebruiken moet zijn, zijn deze stelsels niet ideaal. Daarnaast zouden deze stelsels te ingewikkeld zijn om in te voeren in de hedendaagse samenleving.

Hoofdstuk 4
Het optimale getallenstelsel



[30]

Al jaren proberen mensen over de hele wereld het optimale getallenstelsel te vinden. Steeds wordt er een nieuwe en betere manier van tellen en rekenen bedacht. Het decimale stelsel dat we nu hebben is niet altijd optimaal. In dit hoofdstuk wordt er gekeken naar wat een getallenstelsel goed maakt en wat ons optimale getallenstelsel is.

[30] H, H. (2008). *In dit decimale telwerk (bijvoorbeeld een kilometerteller) heeft elk wieltje tien posities. Draait een wieltje van 9 naar 0, dan draait het volgende wieltje een stap verder.* [Illustratie]. Wikipedia. https://nl.wikipedia.org/wiki/Positiestelsel#/media/Bestand:Odometer10.svg

4.1 Introductie

In dit hoofdstuk zal worden besproken hoe ons ideale stelsel eruit ziet. Omdat de hoofdvraag van dit verslag 'Hoe ziet ons ideale getallenstelsel eruit?' is, moet eerst gedefinieerd worden wat ideaal is. Dit verslag gaat over ons ideale stelsel, niet het ideale stelsel. Daarom geven we aan welke eigenschappen wij belangrijk vinden. Het gekozen stelsel is dus niet objectief het ideale stelsel.

Bij de ideale eigenschappen maken we een onderscheid tussen het type stelsel en het gebruikte grondtal. Deze hebben beide invloed op de eenvoudigheid van cijfers en berekeningen.

Het is van belang dat de notatie van getallen zo eenvoudig mogelijk is. Eenvoudig houdt in dat de getallen zo kort en overzichtelijk mogelijk zijn. Wanneer berekeningen worden gedaan, moet elk getal opgeschreven worden. Als de getallen ingewikkeld en lang zijn, is dat niet handig.

Daarnaast moet het grondtal berekeningen vereenvoudigen. Zoals in het vorige hoofdstuk is besproken, zijn er een aantal grondtallen die niet handig zijn om mee te rekenen. Er zijn ook grondtallen die berekeningen juist vereenvoudigen. Hoe handig een grondtal is hangt af van de grootte en de deelbaarheid van het grondtal.

4.2 Ideale eigenschappen

In het vorige hoofdstuk werden alle nadelen van de notatie in bestaande soorten getallenstelsels besproken. Daarna werd besproken welke nadelen bepaalde grondtallen hebben. Hieruit valt af te leiden welke eigenschappen van een getallenstelsel en grondtal juist wel ideaal zijn. Bij de ideale eigenschappen wordt een onderscheid gemaakt tussen het type stelsel dat gebruikt wordt en het grondtal dat gebruikt wordt.

Het soort stelsel dat gebruikt wordt, moet ervoor zorgen dat de notatie van getallen zo kort en overzichtelijk mogelijk is. Dit is belangrijk, omdat bij berekeningen de getallen genoteerd moeten worden en wanneer ze erg lang zijn, kan dit veel tijd kosten. De getallen moeten overzichtelijk zijn omdat dit het doen van berekeningen makkelijker maakt.

Het grondtal moet een grote deelbaarheid hebben. Dit is handig wanneer berekeningen gedaan worden in het alledaags leven, maar ook bij berekeningen in de wiskunde omdat er bij een grote deelbaarheid van het grondtal met minder kommagetallen en breuken hoeft te worden gerekend. In elk geval is een grondtal dat deelbaar is door 2 handig, want anders worden even getallen veel moeilijker te herkennen. Bij een oneven grondtal zou 10 een oneven getal zijn, maar 20 niet. Daarnaast moet het grondtal niet te groot of klein zijn. Een klein grondtal zorgt voor erg lange cijfers. Bij een groot grondtal moeten er bij een type P2 stelsel veel nieuwe cijfers bedacht worden en onthouden worden. Bij een groot grondtal is er echter ook de optie om getallen in transcriptie te zetten of om een type P1 stelsel te gebruiken. De voordelen en nadelen die een groot grondtal met zich meebrengt moeten overwogen worden.

Daarnaast is het belangrijk dat het stelsel in alle opzichten ideaal is. Hiermee wordt bedoeld dat het stelsel in de wetenschap gebruikt kan worden, maar ook in het alledaags leven. De speciale stelsels die in het vorige hoofdstuk werden besproken zouden dus niet ideaal zijn, omdat deze vaak op een klein gebied toepasbaar zijn en ook lastiger te begrijpen zijn. Het is belangrijk dat het stelsel in de hedendaagse samenleving makkelijk opgenomen zou kunnen worden. Het is daarom gunstig als het stelsel gerelateerd is aan ons decimale stelsel, want dan is het herkenbaar.

4.3 Type getallenstelsel

Zoals uit het vorige hoofdstuk blijkt, is de notatie van getallen in een positioneel stelsel veel eenvoudiger dan de notatie van getallen in een additief of hybride stelsel. De notatie heeft invloed op hoe makkelijk berekeningen zijn, en dus is het belangrijk dat de notatie eenvoudig is.

Er zijn wel een paar problemen bij de notatie van positionele getallen. Zo moet er een nul in het stelsel aanwezig zijn, die dient als plaatshouder. Dit is geen probleem want een nul kan eenvoudig aan de cijfers van een stelsel worden toegevoegd. Ook kan de notatie van grote getallen efficiënter in andere type stelsels. Een voorbeeld hiervan, namelijk $10^{42} + 999$, werd in het vorige hoofdstuk besproken.

Deze problemen wegen echter niet op tegen de problemen die voorkomen bij additieve en hybride stelsels en dus is de notatie in een positioneel stelsel het meest efficiënt.

Welk type positioneel stelsel handiger is, hangt af van de grootte van het grondtal. Wanneer het grondtal 10_{10} of kleiner dan 10_{10} is, kunnen de Arabische cijfers gebruikt worden als cijfers. Dan is dus een type P2 stelsel handiger, want daar hoort een positioneel stelsel met bijvoorbeeld Arabische cijfers bij.

Wanneer het grondtal groter is dan 10, maar niet veel groter, kunnen er simpelweg extra cijfers worden toegevoegd aan de Arabische cijfers, zoals A, B, C, D, E en F bij het hexadecimale stelsel. Wanneer er maar een relatief klein aantal extra cijfers nodig zijn, zal het niet snel een probleem zijn om de waarde van deze cijfers te onthouden. Wanneer het grondtal maar een beetje groter is dan 10, kan er dus een type P2 stelsel met Arabische cijfers worden gebruikt. Natuurlijk kan ervoor gekozen worden om bij een grondtal dat kleiner dan 10, gelijk aan 10, of een beetje groter dan 10, een type P1 stelsel te gebruiken met compleet andere cijfers dan de Arabische cijfers. Dit is echter niet handig omdat de Arabische cijfers bekend zijn, en dus makkelijker om mee te rekenen.

Wanneer het grondtal veel groter dan 10 is, zullen er veel extra cijfers moeten worden toegevoegd aan de Arabische cijfers. Het kan lastig zijn om al deze cijfers te onthouden. Daarom kan het bij een groot grondtal handig zijn om een type P1 stelsel te gebruiken. Er kan ook voor gekozen worden om de cijfers in transcriptie te zetten, en dus een type P2 stelsel te gebruiken. Dit kan eenvoudiger zijn dan een type P1 stelsel gebruiken, omdat de Arabische cijfers gebruikt kunnen worden en er dus geen nieuw cijfersysteem bedacht hoeft te worden.

De voorkeur ligt echter bij een type P2 stelsel, met wanneer nodig extra cijfers. Dit systeem is bekend, en dus makkelijk om door iedereen gebruikt te worden. Daarnaast brengen getallen in een type P1 stelsel of getallen in transcriptie vaak problemen met zich mee, die in het vorige hoofdstuk zijn besproken. Zo zijn type P1 cijfers additief samengesteld, wat vaak tot onoverzichtelijke en lange cijfers leidt. Cijfers in transcriptie worden decimaal samengesteld, en als 10 een kleine deelbaarheid heeft, is dit niet handig. Dit kan opgelost worden door de cijfers met een ander grondtal dan 10 samen te stellen, maar het kan verwarrend zijn wanneer er met twee nieuwe grondtallen gerekend moet worden.

4.4 Grondtal

4.4.1 Grootte

In het vorige hoofdstuk werden nadelen besproken van kleine en grote grondtallen. Het ideale grondtal is niet zo klein dat getallen erg lang worden, en ook niet zo groot dat het nodig is om een type P1 stelsel te gebruiken, of de getallen in transcriptie te zetten. De nadelen van deze notatie methoden zijn al eerder besproken.

Hierna zal gekeken worden naar de deelbaarheid van getallen. Er wordt ervoor gekozen om een grondtal van maximaal 100 te nemen. Wanneer een getal in een type P1 stelsel met een grondtal kleiner dan 100 te zetten, zullen de additieve cijfers enigszins overzichtelijk zijn. Wanneer de cijfers in transcriptie gezet worden, is de maximale waarde van een cijfer gelijk aan 99_{10}. Berekeningen met getallen kleiner dan 100 zullen dan dus volgens een decimaal type P2 stelsel berekend worden. Het kan echter zo zijn dat ervoor gekozen worden om de cijfers van de getallen in transcriptie niet decimaal samen te stellen als blijkt dat dat gunstiger is.

4.4.2 Deelbaarheid

Zoals aangegeven werd, zal er alleen naar de getallen tot en met 100 gekeken worden. Deze staan in tabel 33 weergegeven voor overzichtelijkheid.

Tabel 33: Getallen 1 tot en met 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Ook werd al besproken dat het grondtal deelbaar moet zijn door 2, dus er wordt alleen gekeken naar even grondtallen. De cellen van de getallen die geen grote deelbaarheid hebben worden in tabel 34 grijs gekleurd.

Tabel 34: Oneven en even grondtallen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Het is in elk geval handig als het grondtal deelbaar is door de getallen in de eerste rij van de tabel. Als een getal bijvoorbeeld niet deelbaar is door 3, dan is het getal ook niet deelbaar door 6, 9, 12 en andere veelvouden van 3. Als het grondtal niet deelbaar is door 2, is het grondtal door nog veel minder getallen deelbaar. Er wordt gekeken naar de grondtallen die niet deelbaar zijn door 3 en 4 en deze worden weggestreept.

Tabel 35: Grondtallen die deelbaar zijn door 3 en 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	10

Er wordt nu gekeken naar de delers van de overgebleven getallen.

Tabel 36: Deelbaarheid van de overgebleven getallen

12	**24**	**36**	**48**	**60**	**72**	**84**	**96**
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
6	6	6	6	5	6	6	6
12	12	9	8	6	8	7	8
	24	12	12	10	9	12	12
		18	16	12	12	14	16
		36	24	15	18	21	24
			48	20	24	28	32
				30	36	42	48
				60	72	84	96
------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------
6	7	9	10	12	12	12	12

Bovenaan dikgedrukt staan de grondtallen die nog gekozen kunnen worden. Tussen de grondtallen en de streep staan alle delers van dat grondtal. Onder de streep staat vervolgens hoeveel delers dit getal heeft. De getallen 60, 72, 84 en 96 hebben allemaal evenveel delers, maar 60 is het kleinste getal. Er is al eerder aangegeven dat een klein grondtal handig is. 72, 84 en 96 vallen dus af.

Vervolgens worden 12 en 24 met elkaar vergeleken. 24 heeft maar 1 deler meer dan 12, en dat is het getal 24 zelf. Tegelijkertijd is 12 een 2 keer zo klein getal. Dat 12 een 2 keer zo klein getal is, weegt veel zwaarder mee dan de extra deler van 24. Daarom valt 24 af. Hetzelfde geldt als wanneer 36 en 48 met elkaar vergeleken worden. 48 valt dus ook af. De grondtallen 12, 36 en 60 blijven over.

36 en 60 zijn beide relatief grote getallen. Transcriptie bleek in het vorige hoofdstuk niet handig genoeg te zijn, maar er kan wel een type P2 stelsel gebruikt worden met grondtal 36 of 60. Er zouden dan dus 26 of 50 nieuwe symbolen gemaakt moeten worden. In het dagelijks leven is dit echter ontzettend onhandig. Kinderen zouden op school op deze manier dus meer symbolen moeten leren dan het aantal symbolen in het alfabet. Voor de nu levende generaties zou het ook een stuk moeilijker zijn om 26 of 50 nieuwe symbolen te leren dan 2. In de wetenschap zou ervoor gekozen kunnen worden om een 36- of 60-tallig type P2 stelsel te gebruiken. Bij berekeningen kan er wanneer nodig een tabel met de waarde van de cijfers erbij gehouden worden.

De voordelen van 9 delers van 36 of 12 van 60 wegen niet op tegen de nadelen die deze grote grondtallen met zich meebrengen. 12 heeft 6 delers, wat er ook redelijk veel zijn. Een ideaal getallenstelsel is in alle opzichten ideaal. Het moet dus een bruikbaar stelsel zijn in de wetenschap, maar ook in het dagelijks leven. Een 12-tallig stelsel is bruikbaar in de wetenschap, omdat 12 relatief veel delers heeft, maar het is ook een handig stelsel voor gebruik in het dagelijks leven. Bij een 12-tallig stelsel kan eenvoudig een type P2 stelsel gebruikt worden door twee cijfers toe te voegen, wat, zoals al eerder aangegeven werd, ideaal is. Het ideale getallenstelsel is dus een 12-tallig type P2 stelsel.

4.5 Creatie van het nieuwe getallenstelsel

Om een 12-tallig stelsel te creëren worden de Arabische cijfers met twee extra cijfers gebruikt. Het is ideaal om de Arabische cijfers te gebruiken, omdat deze al bekend zijn. De gebruikte cijfers zien er zo uit:

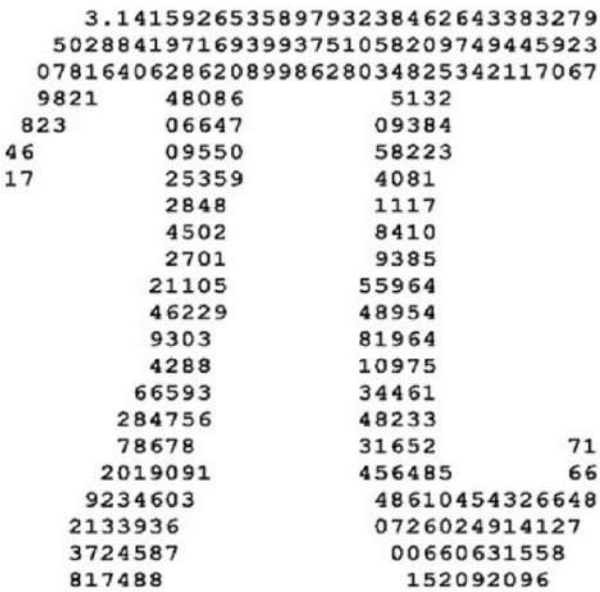
0 (Nul)
1 (Eén)
2 (Twee)
3 (Drie)
4 (Vier)
5 (Vijf)
6 (Zes)
7 (Zeven)
8 (Acht)
9 (Negen)
Ɔ (Muni)
ㄣ (Hes)

Na hes komt het getal 10_{12}. Er zijn al tekens die tegenwoordig vaak gebruikt worden bij een twaalf-tallig stelsel. Voorbeelden hiervan zijn A & B of T & E. Er wordt er nu echter voor gekozen om compleet nieuwe tekens te gebruiken, die niet eerder in de wiskunde zijn gebruikt. Ook de namen van de tekens zijn zelf bedacht, en hebben geen relatie tot de wiskunde. Hier wordt voor gekozen, omdat letters als A & B ook op andere manieren in de wiskunde worden gebruikt, zoals bij parameters, wat verwarrend kan zijn.

Vanaf nu wordt er alleen nog maar in het twaalf-tallige stelsel gerekend. Als er dus niet aangegeven is in welk stelsel er gerekend wordt, wordt er in het twaalf-tallige stelsel gerekend.

Hoofdstuk 5

Invloed van het nieuwe getallenstelsel op de huidige wiskunde



[31]

In de afbeelding hierboven is het getal pi te zien. Hier is pi echter decimaal weergegeven. In een twaalftallig stelsel zal de notatie van pi anders zijn. Dit is niet het enige verschil dat te vinden is tussen het twaalftallige stelsel en het hedendaags gebruikte decimale stelsel. In dit hoofdstuk wordt besproken hoe de huidige wiskunde beïnvloed wordt door het nieuwe stelsel.

[31] *Pi – π: alles over deze wiskundige constante*. (z.d.). [Illustratie]. geocachen. https://geocachen.nl/geocaching/geocache-puzzels-oplossen/pi-%CF%80/

5.1 Introductie

Zoals uit het vorige hoofdstuk blijkt, is ons ideale stelsel een 12-tallig type P2 stelsel. Dit stelsel werkt hetzelfde als het huidige decimale stelsel, maar het grondtal is wel anders. Hierdoor veranderen enige elementen in de wiskunde. Dit zal in dit hoofdstuk besproken worden. Bij alle berekeningen die in dit hoofdstuk gedaan worden, worden de rekenregels uit hoofdstuk 2 gebruikt.

Er is ervoor gekozen om eerst te beschrijven hoe de meest gebruikte onderdelen van de wiskunde veranderen. Er worden tabellen voor optelsommen, aftreksommen, deelsommen, vermenigvuldigen sommen en kwadraten opgesteld. Dit zijn allemaal onderdelen die in de wiskunde veel gebruikt worden en dus is het handig om de nieuwe waarde hiervan te weten. Er worden deelbaarheidsregels opgesteld omdat dit handig kan zijn wanneer deelsommen gedaan worden. Ook worden de wortels van 1 tot en met 10_{12} berekend.

Daarna wordt er naar een aantal onderdelen van de wiskunde gekeken die dagelijks niet zo veel gebruikt worden als bijvoorbeeld optel- en aftreksommen, maar die wel erg belangrijk zijn, omdat ze in de wiskunde veel gebruikt worden. Zo worden de nieuwe waardes van e en pi berekend. Ook worden een aantal rijen, waaronder de rij van Fibonacci besproken.

5.2 Tabellen

5.2.1 Optellen

Tabel 37: Optelsommen van 0 tot en met 10

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Ↄ**	**Ϟ**	**10**
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Ↄ	Ϟ	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Ↄ	Ϟ	10	11
2	2	3	4	5	6	7	8	9	Ↄ	Ϟ	10	11	12
3	3	4	5	6	7	8	9	Ↄ	Ϟ	10	11	12	13
4	4	5	6	7	8	9	Ↄ	Ϟ	10	11	12	13	14
5	5	6	7	8	9	Ↄ	Ϟ	10	11	12	13	14	15
6	6	7	8	9	Ↄ	Ϟ	10	11	12	13	14	15	16
7	7	8	9	Ↄ	Ϟ	10	11	12	13	14	15	16	17
8	8	9	Ↄ	Ϟ	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	9	Ↄ	Ϟ	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Ↄ	Ↄ	Ϟ	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1Ↄ
Ϟ	Ϟ	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1Ↄ	1Ϟ
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1Ↄ	1Ϟ	20

5.2.2 Aftrekken

Waarbij de verticale getallen van de horizontale worden afgetrokken, dus horizontaal - verticaal.

Tabel 38: Aftreksommen van 0 tot en met 10

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Ↄ**	**Ϟ**	**10**
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Ↄ	Ϟ	10
1	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Ↄ	Ϟ
2	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Ↄ
3	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

5	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
6	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
7	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
8	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
9	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
Ↄ	-Ↄ	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
ϟ	-ϟ	-Ↄ	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
10	-10	-ϟ	-Ↄ	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

5.2.3 Vermenigvuldigen

Tabel 39: Producten van 0 tot en met 10

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Ↄ**	**ϟ**	**10**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Ↄ	ϟ	10
2	0	2	4	6	8	Ↄ	10	12	14	16	18	1Ↄ	20
3	0	3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29	30
4	0	4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38	40
5	0	5	Ↄ	13	18	21	26	2ϟ	34	39	42	47	50
6	0	6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56	60
7	0	7	12	19	24	2ϟ	36	41	48	53	5Ↄ	65	70
8	0	8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74	80
9	0	9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83	90
Ↄ	0	Ↄ	18	26	34	42	50	5Ↄ	68	76	84	92	Ↄ0
ϟ	0	ϟ	1Ↄ	29	38	47	56	65	74	83	92	Ↄ1	ϟ0
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	Ↄ0	ϟ0	100

5.2.4 Delen

De verticale rij wordt gedeeld door de horizontale rij, dus horizontaal / verticaal.

Tabel 40: Quotiënten van 0 tot en met 6

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	On	On	On	On	On	On	On
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	0,6	1	1,6	2	2,6	3
3	0	0,4	0,8	1	1,4	1,8	2
4	0	0,3	0,6	0,9	1	1,3	1,6
5	0	$0,\overline{2497}$	$0,\overline{4972}$	$0,\overline{7249}$	$0,\overline{9724}$	1	$1,\overline{2497}$
6	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,Ɔ	1
7	0	$0,\overline{186Ɔ35}$	$0,\overline{35186Ɔ}$	$0,\overline{5186Ɔ3}$	$0,\overline{6Ɔ3518}$	$0,\overline{86Ɔ351}$	$0,\overline{Ɔ35186}$
8	0	0,16	0,3	0,46	0,6	0,76	0,9
9	0	$0,14$	0,28	0,4	0,54	0,68	0,8
Ɔ	0	$0,1\overline{2497}$	$0,\overline{2497}$	$0,3\overline{7249}$	$0,\overline{4972}$	0,6	$0,\overline{7249}$
↋	0	$0,\overline{11}$	$0,\overline{22}$	$0,\overline{33}$	$0,\overline{44}$	$0,\overline{55}$	$0,\overline{66}$
10	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6

Tabel 41: Quotiënten van 7 tot en met 10

	7	**8**	**9**	**Ɔ**	**↋**	**10**
0	On	On	On	On	On	On
1	7	8	9	Ɔ	↋	10
2	3,6	4	4,6	5	5,6	6
3	2,4	2,8	3	3,4	3,8	4
4	1,9	2	2,3	2,6	2,9	3
5	$1,\overline{4972}$	$1,\overline{7249}$	$1,\overline{9724}$	2	$2,\overline{2497}$	$2,\overline{4972}$
6	1,2	1,4	1,6	1,8	1,Ɔ	2
7	1	$1,\overline{186Ɔ35}$	$1,\overline{35186Ɔ}$	$1,\overline{5186Ɔ3}$	$1,\overline{6Ɔ3518}$	$1,\overline{86Ɔ351}$
8	0,Ɔ6	1	1,16	1,3	1,46	$1,6$

9	0,94	0,Ɔ8	1	1,14	1,28	1, 4
Ɔ	$0,\overline{84971}$	$0,\overline{9724}$	$0,\text{Ɔ}\overline{9723}$	1	$1,\overline{12497}$	$1,\overline{2497}$
ㄣ	$0,\overline{77}$	$0,\overline{88}$	$0,\overline{99}$	$0,\overline{\text{ƆƆ}}$	1	$1,\overline{11}$
10	0,7	0,8	0,9	0,Ɔ	0,ㄣ	1

5.2.5 Machten

Met horizontaal tot de macht verticaal.

Tabel 42: Machten van 0 tot en met 10

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Ɔ**	**ㄣ**	**10**
0	on	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Ɔ	ㄣ	10
2	0	1	4	9	14	21	30	41	54	69	84	Ɔ1	100
3	0	1	8	23	54	Ɔ5	160	247	368	509	6ㄣ4	92ㄣ	1000
4	0	1	14	69	194	441	900	1481	2454	3969	5954	8581	10000
5	0	1	28	183	714	1985	4600	9887	16ㄣ68	2Ɔ209	49Ɔ54	7924ㄣ	100000

5.3 Deelbaarheidsregels

Een getal a is deelbaar door 2 als a een even getal is, dus als a eindigt op een 2, 4, 6, 8, ↊ of 0.

3732 is deelbaar door 2, want dit getal eindigt op een 2.

Een getal a is deelbaar door 3 als het laatste cijfer van a een 3, 6, 9 of 0 is.

64579 is deelbaar door 3, want dit getal eindigt op een 9.

Een getal a is deelbaar door 4 als het laatste cijfer van a een 4, 8 of 0 is.

83478 is deelbaar door 4, want dit getal eindigt op een 8.

Een getal a is deelbaar door 5 als het resultaat van het afwisselend op- en aftellen van a in groepen van 2 deelbaar is door 5. Als een getal a een oneven aantal cijfers bevat, moet het eerste cijfer van a alleen in een groep. Deze techniek werkt, omdat 5 deelbaar is door 101.

↋10374601771 is deelbaar door 5, want ↋1 - 03 + 74 - 60 + 17 - 71 = 68 en 68 is deelbaar door 5.

Een getal a is deelbaar door 6 als het laatste cijfer van a een 6 of 0 is.

74836756 is deelbaar door 6, want dit getal eindigt op een 6.

Een getal a is deelbaar door 7 als het resultaat van het afwisselend op- en aftellen van a in groepen van 3 deelbaar is door 7. Als het aantal cijfers van a deelbaar is door 3 kunnen alle cijfers in een groep van 3. Als er 1 cijfer teveel is, moet het eerste cijfer van a alleen in een groep. Als er 2 cijfers teveel zijn, moet het getal van de eerste 2 cijfers van a alleen in een groep. Deze techniek werkt, omdat 7 deelbaar is door 1001. Als het resultaat van het afwisselend op- en aftellen te groot is, dan kan deze techniek herhaald worden.

549↊327500↊2 is deelbaar door 7, want 549 - ↊32 + 750 - 0↊2 = 185 en 185 is deelbaar door 7.

Een getal a is deelbaar door 8 als het getal van de laatste 2 cijfers van a deelbaar is door 8.

8735873548 is deelbaar door 8, want het getal van de laatste 2 cijfers, dus 48, is deelbaar door 8.

Een getal a is deelbaar door 9 als het getal van de laatste 2 cijfers van a deelbaar is door 9.

7458360 is deelbaar door 9, want het getal van de laatste 2 cijfers, dus 60, is deelbaar door 9.

Een getal a is deelbaar door ↊ als a deelbaar is door 5 en door 2

300005392 is deelbaar door ↊, want 300005392 is deelbaar door 5 (zie deelbaarheid van 5 voor een voorbeeld) en eindigt op een 2, dus is deelbaar door 2.

Een getal a is deelbaar door ↋ als de som van alle cijfers van a deelbaar door is door ↋

679 is deelbaar door ↋, want 6 + 7 + 9 = 1↊ en 1↊ is deelbaar door ↋.

Een getal a is deelbaar door 10 als het laatste cijfer van a een 0 is.

4750 is deelbaar door 10, want dit getal eindigt op een 0.

5.4 Wortels

De wortels van 1 tot en 10 zijn berekend. Om aan te tonen dat de uitkomst klopt, wordt het antwoord gekwadrateerd. Deze berekeningen zijn in de bijlagen opgenomen omdat deze erg lang zijn. Ook wordt er voor één van de wortels aangegeven hoe de berekeningen zijn gedaan. De wortels zijn tot vijf significante cijfers berekend.

√1 = 1
1^2 = 1

√2 = 1,4↋79
1,4↋79^2 = 1,↋↋↋↋ ≈ 2

√3 = 1,8950
1,8950^2 = 3,0000

√4 = 2
2^2 = 4

√5 = 2,29↋↋
2,29↋↋^{2} = 5,0009 ≈ 5

√6 = 2,5489
2,5489^2 = 6,0001 ≈ 6

√7 = 2,78↋Ɔ
2,78↋Ɔ^2 = 6,↋↋↋4 ≈ 7

√8 = 2,9↋36
2,9↋36^2 = 7,↋↋↋Ɔ ≈ 8

√9 = 3
3^2 = 9

√Ɔ = 3,1↋45
3,1↋45^2 = Ɔ,0001 ≈ Ɔ

√↋ = 3,3973
3,3973^2 = ↋,0000

√10 = 3,56Ɔ0
3,56Ɔ0^2 = 10,000

5.4.1 Wortels berekenen

In dit voorbeeld wordt de wortel van 5 in het twaalftallige stelsel berekend. Hiervoor wordt eerst de tientallige wortel van vijf omgerekend naar een twaalftallig getal. Om aan te tonen dat dit de twaalftallige wortel van 5 is, wordt het gekwadrateerd.

$\sqrt{5_{10}} = 2{,}236067977_{10}$
De waarde van $\sqrt{5_{10}}$ is gelijk aan $\sqrt{5_{12}}$, het getal zelf echter niet
$\sqrt{5_{10}} - 2_{10} = \sqrt{5_{12}} - 2_{10}$
$\sqrt{5_{10}} - 2_{10} = 0{,}236067977_{10}$

Eerst wordt gekeken hoe vaak $12^{-1}{}_{10}$ in $0{,}236067977_{10}$ past. In het volgende gedeelte wordt in een tientallig stelsel gerekend, totdat aangegeven wordt dat dit niet meer zo is.

$0{,}236067977/12^{-1} = 0{,}236067977 \cdot 12$

In de volgende tabel wordt 0,236067977 · 12 berekend op de wijze die in hoofdstuk 2 is besproken.
In de tabel worden eerst de twee getallen onder elkaar gezet. Dan wordt de 2 van de twaalf met elk van de cijfers van het andere getal vermenigvuldigt. De uitkomsten hiervan worden onder de tweede rij met strepen gezet. Hetzelfde wordt gedaan met de 10 uit de 12. Wanneer de uitkomst van een vermenigvuldiging groter dan 9 is, wordt er een 1 (of een groter cijfer wanneer nodig) in rij a gezet. Al de uitkomsten van de vermenigvuldigingen en alle cijfers in rij a worden bij elkaar opgeteld op de wijze die besproken is in hoofdstuk 2. Als een uitkomst van een som groter dan 9 is, wordt er een 1 in rij b gezet die bij het cijfer link daarvan opgeteld wordt. Dit is dus eigenlijk precies de methode die in hoofdstuk 2 is besproken, maar in een tabel omdat dat overzichtelijker is.

Tabel 43: Product 0,236067977 · 12

		0,	2	3	6	0	6	7	9	7	7	
	1	2,	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x
a				1		1	1	1	1	1		
b			1			1	1	1	1			
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		0										
		0,	4									
		0,	0	6								
		0,	0	0	2							
		0,	0	0	0	0						
		0,	0	0	0	0	2					

		0,	0	0	0	0	0	4				
		0,	0	0	0	0	0	0	8			
		0,	0	0	0	0	0	0	0	4		
		0,	0	0	0	0	0	0	0	0	4	
		2,	0									
		0,	3									
		0,	0	6								
		0,	0	0	0							
		0,	0	0	0	6						
		0,	0	0	0	0	7					
		0,	0	0	0	0	0	9				
		0,	0	0	0	0	0	0	7			
		0,	0	0	0	0	0	0	0	7		
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
		2,	8	3	2	8	1	5	7	2	4	

Dus $0{,}236067977 \cdot 12 = 2{,}832815724 = 0{,}236067977/12^{-1}$

12^{-1} past dus 2 hele keren in 0,236067977

Dan wordt $0{,}236067977 - 2 \cdot 12^{-1}$ berekend

$12^{-1} = 0{,}08\overline{3}$
$2 \cdot 12^{-1} = 0{,}1\overline{6}$
Dus $0{,}236067977 - 2 \cdot 12^{-1} = 0.236067977 - 0{,}1\overline{6}$

Deze som wordt in tabel 46 berekend. Dit wordt met de methode die in hoofdstuk 2 is beschreven gedaan. Eerst werden de getallen boven elkaar gezet. Dan werden de meest rechter cijfers van elkaar afgetrokken. Wanneer een cijfer in het bovenste getal kleiner was dan in het onderste getal, werd bij het cijfer in de bovenste rij tien opgeteld en werd er 10 van het cijfer links daarvan afgetrokken.

Een voorbeeld hiervan is tabel 44.

Tabel 44: Berekening

a				
0,	2	3	6	0
0,	1	6	6	6

0 - 6 kan niet. De 6 links van de nul werd dus veranderd naar een 5 en de 0 naar een 10. Deze verandering werd in rij a genoteerd.

Tabel 45: Bewerking van de berekening in tabel 44

a			5	10
0,	2	3	6	0
0,	1	6	6	6

Daarna moest 5 - 6 worden berekend, wat ook niet kan. 5 werd dus naar 15 veranderd en de 3 naar 2. Er is niet bij elke verandering een andere tabel gemaakt omdat dit voor erg veel tabellen zou zorgen.

Tabel 46: Berekening

a		12	15	10					
0,	2	3	6	0	6	7	9	7	7
0,	1	6	6	6	6	6	6	6	7
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,	0	6	9	4	0	1	3	1	0

Dus 0.236067977 - 0,166666667 = 0,069401310

Dan werd er gekeken naar hoe vaak 12^{-2} in 0,069401310 past.
$0{,}069401310/12^{-2} = 0{,}069401310 \cdot 12^{2}$
$12^{2} = 144$

In tabel 47 wordt dezelfde werkwijze gebruikt als bij de eerste tabel. Dit keer worden echter alle kommagetallen tussendoor al opgeteld. Hierdoor is de tabel een stuk korter.

Tabel 47: Berekening

		0,	0	6	9	4	0	1	3	1	0
1	4	4,	0	0	0	0	0	0	0	0	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x
		1	1	1							
		2	2 + 3	3 + 1	1		1	1			

-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4:		0,	0	4	6	6	0	4	2	4	0
40:	0	0,	4	6	6	0	4	2	4	0	
100:	0	6,	9	4	0	1	3	1	0		
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
	0	9,	9	9	3	7	8	8	6	4	0

$0{,}069401310 \cdot 12^2 = 9{,}993788640$

12^{-2} past dus 9 hele keren in 0,069401310

Dan werd $9 \cdot 12^{-2}$ van 0,069401310 afgetrokken

$0{,}069401310 - 9 \cdot 12^{-2}$
$9 \cdot 12^{-2} = 9 \cdot 1/144 = 9/144 = 1/16 = 0{,}0625$

Tabel 48: Berekening

			8	14					
0,	0	6	9	4	0	1	3	1	0
0,	0	6	2	5	0	0	0	0	0
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,	0	0	6	9	0	1	3	1	0

Dus $0{,}069401310 - 9 \cdot 12^{-2} = 0{,}006901310$

Dan werd gekeken hoe vaak 12^{-3} in 0,006901310 past

$0{,}006901310/12^{-3} = 0{,}006901310 \cdot 12^3$
$12^3 = 1728$
$0{,}006901310 \cdot 12^3 = 0{,}006901310 \cdot 1728$

Tabel 49: Berekening

				0,	0	0	6	9	0	1	3	1	0	
	1	7	2	8										
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x
			1	1	1	2	1		2					
				4	1+6	4+1	7	2		2				

-		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8:				0,	0	0	8	2	0	8	4	8	0	
20:			0	0,	0	2	8	0	2	6	2	0		
700:		0	0	0,	2	3	0	7	1	7	0			
1000:	0	0	0	6,	9	0	1	3	1	0				
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		+
			1	1,	9	2	5	4	6	3	6	8	0	

Dus 0,006901310 · 12^3 = 11,9325463680

12^{-3} past dus 11 hele keren in 0,006901310

0,006901310 - 11 · 12^{-3}
12^{-3} = 1/1728
11 · 1/1728 = 11/1728 = 0,006365741

0,006901310 - 0,00636574

Tabel 50: Berekening

				8	9	10	12	10	10
0,	0	0	6	9	0	1	3	1	0
0,	0	0	6	3	6	5	7	4	1
-	-	-	-	-	-	-	-	-	
0,	0	0	0	5	3	5	5	6	0

Dus 0,006901310 - 0,006365741 = 0,000535560

0,000535560/12^{-4} = 0,000535560 · 12^4
12^4 = 20736

0,000535560 · 20736

Tabel 51: Berekening

					0,	0	0	0	5	3	5	5	6	0	
	2	0	7	3	6,	0	0	0	0	0	0	0	0		
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	
					1		1	2	2	1	1				

				1		3+1	2+1	3+1 +3 +1	1+3	3+1 +2	3+1	3+1			
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
6:					0,	0	0	0	0	8	0	0	6	0	
30:				0	0,	0	0	5	9	5	5	8	0		
700 :			0	0	0,	0	5	1	5	5	2	0			
200 00	0	0	0	0	0,	6	0	0	2	0					
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
				1	1,	0	9	6	2	5	2	2	6	0	

Dus $0{,}000545560 \cdot 12^4 = 11{,}096252260$

12^{-4} past 11 hele keren in 0,000545560

De eerste 4 decimalen van 0.236067977_{10} in een twaalftallig stelsel zijn $0{,}29ㄣㄣ_{12}$

$\sqrt{5}_{12}$ is dus $2{,}29ㄣㄣ_{12}$

Om dit te controleren wordt 2,29ㄣㄣ · 2,29ㄣㄣ berekend. Deze berekening wordt in het twaalftallige stelsel gedaan

$\sqrt{5}_{12}$ = 2,29ㄣㄣ dus 5^2 = 2,29ㄣㄣ · 2,29ㄣㄣ

2,29ㄣㄣ · 2,29ㄣㄣ = (2,29ㄣㄣ · 2,29ㄣㄣ) · 10^8 /10^8
= (229ㄣㄣ · 229ㄣㄣ)/10^8
229ㄣㄣ · 229ㄣㄣ wordt berekend

Tabel 52: Berekening

					2	2	9	ㄣ	ㄣ	
					2	2	9	ㄣ	ㄣ	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x
	1	2	4	6	4	2	1			
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
								Ↄ	1	
							Ↄ	1	0	

						8	3	0	0	
					1	Ɔ	0	0	0	
				1	Ɔ	0	0	0	0	
							Ɔ	1	0	
						Ɔ	1	0	0	
					8	3	0	0	0	
				1	Ɔ	0	0	0	0	
			1	Ɔ	0	0	0	0	0	
						8	3	0	0	
					8	3	0	0	0	
				6	9	0	0	0	0	
			1	6	0	0	0	0	0	
		1	6	0	0	0	0	0	0	
					1	Ɔ	0	0	0	
				1	Ɔ	0	0	0	0	
			1	6	0	0	0	0	0	
			4	0	0	0	0	0	0	
		4	0	0	0	0	0	0	0	
				1	Ɔ	0	0	0	0	
			1	Ɔ	0	0	0	0	0	
		1	6	0	0	0	0	0	0	
		4	0	0	0	0	0	0	0	
	4	0	0	0	0	0	0	0	0	
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
	5	0	0	0	9	4	4	0	1	

Dus 229ㄣㄣ · 229ㄣㄣ = 500094401

(229ㄣㄣ · 229ㄣㄣ)/10^8 = 500094401/10^8 = 5,00094401
Met significantie 5 dus 2,29ㄣㄣ = 5,0009

5.5 Het getal e

Het getal e is een wiskundige constante. Het is, naast pi, een van de belangrijkste constanten in de wiskunde. Als $f(x) = a^{x}$ en $f(x) = f'(x)$, dan is e de enige waarde van a waarvoor dit klopt. In het decimale getallenstelsel is e ongeveer gelijk aan 2,71828. e wordt als volgt gedefinieerd:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$$

[5.1]

e is een irrationaal getal, dus het is niet exact uit te rekenen. e wordt benaderd op de eerste 8 decimalen.

Een andere schrijfwijze van e is via de taylorreeks:

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!}$$

Een taylorreeks is de benadering van een functie als een machtreeks waarvan de coëfficiënten worden berekend uit de waarden van de afgeleiden van deze functie in een bepaald punt. De taylorreeks van e^{x} is hierboven weergegeven. [5.2]

Voor x kan 1 ingevuld worden, we krijgen dan:

$$e^{1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{n}}{n!} = e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \dots$$

Als de hierboven gegeven som uitgerekend wordt krijgen we e. Dit wordt gedaan voor de eerste 8 termen. Dus hier wordt gezegd dat:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\frac{1}{1} = 1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1\text{ϟ}400} = \frac{1\text{ϟ}400}{1\text{ϟ}400}$$

$$\frac{1}{1} = 1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1\text{ϟ}400} = \frac{1\text{ϟ}400}{1\text{ϟ}400}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1\text{ϟ}400} = \frac{\text{ϟ}800}{1\text{ϟ}400}$$

$$\frac{1}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{6}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1↋400}=\frac{3↊80}{1↋400}$$

$$\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{20}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1↋400}=\frac{↋80}{1↋400}$$

$$\frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{↊0}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1↋400}=\frac{240}{1↋400}$$

$$\frac{1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{500}=\frac{8\cdot 7}{1↋400}=\frac{48}{1↋400}$$

$$\frac{1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{2↋00}=\frac{8}{1↋400}$$

$$\frac{1}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{1↋400}$$

$$\frac{1↋400}{1↋400}+\frac{1↋400}{1↋400}+\frac{↋800}{1↋400}+\frac{3↊80}{1↋400}+\frac{↋80}{1↋400}+\frac{240}{1↋400}+\frac{48}{1↋400}+\frac{8}{1↋400}+\frac{1}{1↋400}=\frac{53515}{1↋400}=2,87522$$

e is in het 12-tallige stelsel dus 2,87522.

5.6 Het getal pi

Pi berekenen blijkt erg lastig te zijn. Eerst dachten we gebruik te maken van een (oneindige) rij zoals bij e is gedaan. Er bestaan erg veel rijen met pi erin. Eén van deze rijen wordt in de volgende paragraaf besproken. Het probleem bij deze rij, en bij veel andere rijen, is dat de convergentiesnelheid erg laag is. Dit begrip is uit te leggen aan de hand van de rij die we gebruikten om e uit te rekenen. Deze rij had een erg hoge convergentiesnelheid, want er hoefden maar een paar waardes voor x ingevuld te worden om de nieuwe waarde van e te verkrijgen. Stel de definitie van e werd gebruikt, en niet zijn taylorreeks, dan hadden er veel meer waardes voor x moeten worden ingevuld om dezelfde waarde voor e te krijgen. Bij deze rij is de convergentiesnelheid dus heel laag. Bij rijen waar de convergentiesnelheid wel hoog is, wordt er vaak gebruik gemaakt van grote getallen. Zo is er bijvoorbeeld:

$$\frac{\pi^{4}}{90} = \frac{1}{1^{4}} + \frac{1}{2^{4}} + \frac{1}{3^{4}} + \frac{1}{4^{4}} \dots$$

90_{10} is natuurlijk niet gelijk aan 90_{12}. Daardoor zou deze rij in een twaalftallig stelsel er anders uitzien. Daarom zou deze manier eerst bewezen moeten worden voor een twaalftallig getallenstelsel, maar dat is te ingewikkeld.

Hierna realiseerden we ons dat π berekend kon worden door het getal van pi van een decimaal getallenstelsel om te zetten naar het twaalftallig getallenstelsel. Stel er wordt een cirkel met diameter d getekend. Volgens de definitie van π is de omtrek van deze cirkel nu πd. Als we nu een draadje wol over de omtrek van deze cirkel leggen en het draadje precies afknippen op de plek waar het draadje de cirkel voltooid, hebben we een draadje wol met de lengte van de omtrek van de cirkel, dus πd. Als de lengte van het draadje wol wordt opgemeten en gedeeld door d, krijgen we π. Stel er wordt een cirkel gekozen met een diameter van 1, dan is de omtrek gelijk aan π. Als we in een decimaal getallenstelsel de lengte van het draadje wol zouden opmeten, zouden we ongeveer 3,14 krijgen. Maar deze lengte kan natuurlijk ook gemeten worden in een twaalftallig getallenstelsel. Hieruit volgt dat π dus gewoon omgezet gedaan van een decimaal getallenstelsel naar een twaalftallig getallenstelsel. Met de omschrijfmethode in hoofdstuk 2.8 kan dit gedaan worden. Hieruit volgt een waarde voor pi van ongeveer 3,1848.

5.7 Rijen

Een aantal van de bekendste rijen worden behandeld. Natuurlijk kunnen niet alle rijen behandeld worden. Dat zou enorm veel tijd kosten. Daarom zijn drie rijen uitgekozen die in de wiskunde veel gebruikt worden.

5.7.1 De rij van Fibonacci

De rij van Fibonacci is een rij waarvan de eerste 2 getallen bij elkaar opgeteld worden om het getal erna te krijgen. Deze rij begint met de getallen 0 en 1. In het twaalftallige stelsel gaat deze rij er dus zo uit zien:

0 - 1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 11 - 19 - 2Ɛ - 37 …

De recursieformule hiervoor is: u(n - 2) + u(n - 1) = u(n). Met u(0) = 0 en u(1)= 1

Om hier een algemene formule van te maken is eerst informatie nodig over differentievergelijkingen. Een differentievergelijking is een relatie, waarmee de elementen van een rij recursief gedefinieerd worden. Dit betekent dat elk element afhangt van het (de) voorafgaand(e) element(en). Een speciaal geval hiervan is een lineaire differentievergelijking. Deze differentievergelijking heeft de vorm van:

$x_n = c_0(n) + c_1(n)x_{n-1} + c_2(n)x_{n-2} + \ldots + c_k(n)x_{n-k}$

Hier hangt de waarde van c van n af. Als dit niet het geval is, is de vergelijking:

$x_n = c_0 + c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \ldots + c_kx_{n-k}$

In het geval van de vergelijking voor de rij van fibonacci is c_0 gelijk aan 0. Het heet dan een homogene vergelijking. De oplossing van een homogene vergelijking zijn te vinden als voor x_n, b^n gesubstitueerd wordt. De vergelijking wordt dan:

$b^n = c_1b^{n-1} + c_2b^{n-2} + \ldots + c_kb^{n-k} \Rightarrow 0 = -b^n + c_1b^{n-1} + c_2b^{n-2} + \ldots + c_kb^{n-k} \Rightarrow$
$0 = b^n - c_1b^{n-1} - c_2b^{n-2} - \ldots - c_kb^{n-k}$

De algemene oplossing van deze differentievergelijking in deze vorm is

$x(n) = a_1b_1^n + a_2b_2^n + \ldots + a_kb_k^n$

Waar a bepaalde vrij te kiezen coëfficiënten zijn.

Met de bovenstaande formule kan een homogene vergelijking gemaakt worden voor de rij van fibonacci:

$0 = b^n - c_1b^{n-1} - c_2b^{n-2} - \dots - c_kb^{n-k}$

Aangezien het element afhangt van de vorige 2 elementen (u(n - 2) + u(n - 1) = u(n)), zijn alleen de eerste twee waardes belangrijk, dus wordt de vergelijking:

$0 = b^2 - b - 1$

Met de abc-formule volgt dat $b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, oftewel $b_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en $b_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Bekend is dat $x_{Hn} = a_1b_1^n + a_2b_2^n$
Ook weten we dat u(0) = 0 en u(1) = 1.
Invullen van u(0) = 0 geeft dat $0 = a_1 + a_2 \Rightarrow a_1 = -a_2$.
Invullen van u(1) = 1 geeft dat $1 = a_1b_1 + a_2b_2$
a_1 substitueren door $-a_2$ geeft $1 = a_2b_2 - a_2b_1$
b_1 en b_2 zijn bekend, dus ook deze worden ingevuld.

$1 = a_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) - a_2(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = a_2(\frac{1-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{2}) =- a_2\sqrt{5} \Rightarrow a_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$
$a_1 = -a_2$ dus $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Als de waardes van a_1, b_1 a_2 en b_2 worden ingevuld in de formule van x_{Hn} krijgen we

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{-1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{(1+\sqrt{5})^n}{2^n} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{-(1-\sqrt{5})^n}{2^n} = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \bullet 2^n}$$

Een formule voor de rij van fibonacci is dus

$$x(n) = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \bullet 2^n}$$
[5.3]

Deze formule wordt ook gebruikt in het decimale stelsel, maar zoals in de paragraaf van wortels te zien is, is $\sqrt{5}$ anders in een decimaal getallenstelsel dan in ons getallenstelsel.

In de formule voor de rij van Fibonacci is een bepaalde verhouding heel belangrijk, genaamd de gulden snede. Deze verhouding ziet er als volgt uit:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

De verhouding $\frac{a}{b}$, het gulden getal genoemd, wordt aangeduid met phi (φ). Dit is ook de waarde voor b_1 hierboven.

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{b}} \Rightarrow \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \Rightarrow \varphi(\varphi - 1) = 1 \Rightarrow \varphi^{2} - \varphi - 1 = 0$$

Hieruit volgt met de abc-formule dat $\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Er wordt alleen gekeken naar de positieve oplossing, dus $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Met de waarde van wortel 5 die in dit hoofdstuk bij ‘wortels’ is gevonden kan het gulden getal worden berekend. Dit is ongeveer gelijk aan 1,74ㄣㄣ6.

5.7.2 Kwadratenrij

Dit is de rij die alle kwadraten van de positieve gehele getallen benoemd.

Dus 1^2, 2^2, 3^2…

Uitgerekend ziet deze rij er als volgt uit:

1, 4, 9, 14, 21, 30, 41, 54, 69, 84, Ɔ1, 100

5.7.3 Bazel-probleem

Het Bazel-probleem is een beroemd probleem waar geprobeerd wordt de sommatie van de multiplicatieve inversen van de kwadraten van de natuurlijke getallen te vinden. Dit kun je wiskundig opschrijven als:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2}}$$

Om dit uit te kunnen rekenen is eerst wat achtergrondinformatie nodig. Een polynoom is een wiskundige functie in de vorm van
$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$,
waarbij $n \in \mathbb{N}$ en de getallen van a de zogenoemde coëfficiënten zijn van de polynoom. [5.5] De graad is de hoogst voorkomende macht in de polynoom. Volgens de hoofdstelling van de algebra kan elke polynoom met graad t worden ontbonden in t factoren. [5.6] Dit zal er als volgt uitzien:

$$p(x) = c \bullet (x - b_{1}) \bullet (x - b_{2}) \bullet \ldots \bullet (x - b_{n})$$

Hier zijn b_1, b_2, … b_n de nulpunten van de polynoom en is c een constante.

Dit wordt omgeschreven door de hele polynoom te vermenigvuldigen met $\frac{(-b_{1})(-b_{2})(-b_{3})\ldots(-b_{n})}{(-b_{1})(-b_{2})(-b_{3})\ldots(-b_{n})}$.

Dit is gelijk aan 1, dus dit verandert verder niks.

$$p(x) = \frac{(-b_1)(-b_2)(-b_3)...(-b_n)}{(-b_1)(-b_2)(-b_3)...(-b_n)} \bullet c \bullet (x - b_1) \bullet (x - b_2) \bullet ... \bullet (x - b_n) =$$

$$c(-b_1)(-b_2)(-b_3)...(-b_n) \bullet \frac{(x - b_1) \bullet (x - b_2) \bullet ... \bullet (x - b_n)}{(-b_1)(-b_2)(-b_3)...(-b_n)}$$

We noemen $(c(-b_1)(-b_2)(-b_3)...(-b_n))$ nu k.

$$p(x) = k \bullet \frac{(x-b_1) \bullet (x-b_2) \bullet ... \bullet (x-b_n)}{(-b_1)(-b_2)(-b_3)...(-b_n)} = \frac{x-b_1}{-b_1} \bullet \frac{x-b_2}{-b_2} \bullet ... \bullet \frac{x-b_n}{-b_n} = k(1 - \frac{x}{b_1})(1 - \frac{x}{b_2})...(1 - \frac{x}{b_n})$$

Om het Bazel-probleem op te lossen wordt gekeken naar sin (x). Volgens de taylorreeks is

$$sin\,(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$
[5.2]

Dit kan gezien worden als een polynoom. De nulpunten van sin (x) zijn makkelijk te bepalen.

$$sin\,(x) = 0$$

$$x = 0 + 2k\pi \vee x = \pi - 0 = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$$

De nulpunten van dit polynoom zijn dus 0, π, -π, 2π, -2π …
sin (x) is dus als volgt te schrijven:

$$sin\,(x) = c(x)(x - \pi)(x + \pi)(x - 2\pi)(x + 2\pi)...$$

We hebben nu 2 reeksen voor sin (x). Beide reeksen worden gedeeld door x. We krijgen:

$$\frac{sin\,(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...$$

$$\frac{sin\,(x)}{x} = c(x - \pi)(x + \pi)(x - 2\pi)(x + 2\pi)...$$

Met deze tweede reeks gaan we verder en (x - a)(x + a) worden volledig uitgerekend. (x - a)(x + a)= x^2 - a^2, dus we krijgen:

$$\frac{sin\,(x)}{x} = c(x^2 - \pi^2)(x^2 - 4\pi^2)(x^2 - 9\pi^2)...$$

Aangezien p(x) kan worden geschreven als

$$p(x) = k(1 - \frac{x}{b1})(1 - \frac{x}{b2})...(1 - \frac{x}{bn})$$

Volgt

$$\frac{sin\,(x)}{x} = k(1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}) \ldots$$

We hebben nu twee keer $\frac{sin\,(x)}{x}$, dus nu worden deze 2 aan elkaar gelijkgesteld.

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ \ldots = k(1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}) \ldots$$

Alleen de coëfficiënten van x^2 zijn belangrijk, dus er wordt bij beide kanten alleen gekeken naar de coëfficiënten van x^2.

Links is dit $- \frac{1}{3!} =- \frac{1}{3 \bullet 2 \bullet 1} =- \frac{1}{6}$

Rechts is dit $- \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} \ldots$

Aangezien de twee hele reeksen aan elkaar gelijk zijn, zijn de coëfficiënten ook aan elkaar gelijk.

$$- \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \ldots =- \frac{1}{6}$$

$$- \frac{1}{\pi^2} (\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots) =- \frac{1}{6}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2}$$

$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2}$ is dus gelijk aan $\frac{\pi^2}{6}$. Met de berekende waarde van π kan dit ongeveer in decimalen uitgerekend worden. Dan geldt $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} \approx$ 1,78Ͻ5

[5.4]

Discussie

Aan de validiteit van dit verslag hoeft niet getwijfeld te worden. De hoofdvraag is duidelijk beantwoord door de deelvragen. De hoofdvraag ging over het stelsel dat voor ons ideaal zou zijn en aangezien wij hebben aangegeven wat ideaal voor ons betekent en een stelsel hebben gevonden wat hierbij goed aansluit, is de validiteit van het verslag goed. Wel moet hierbij worden gezegd dat dit het stelsel is dat voor ons ideaal is en niet een stelsel dat objectief het beste is. Zo kunnen voor computers veel beter andere stelsels worden toegepast dan ons stelsel. Daarnaast hoeft niet iedereen het eens te zijn met de eisen die wij hebben gesteld aan het ideale stelsel.

Het is nuttig om de betrouwbaarheid van dit verslag te bespreken. De bronnen die in hoofdstuk één zijn gebruikt zijn vaak niet wiskundig, maar gaan juist vaak meer over geschiedenis. Het kan zijn dat er bronnen zijn gebruikt die onbetrouwbaar zijn. We hebben geprobeerd om dit zoveel mogelijk te ontwijken. We hebben twee boeken veel gebruikt, namelijk 'The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer' van Georges Ifrah, autodidactisch geleerde op het gebied van de geschiedenis van de wiskunde, en 'The History of Mathematics: A Brief Course' van Roger Cooke, hoogleraar bij de Technische Universiteit Delft. In deze boeken werd duidelijk de ontwikkeling van allerlei getallenstelsels beschreven. We hebben de online bronnen met deze boeken, en ook deze boeken met elkaar, vergeleken. Dit sluit natuurlijk niet uit dat we bronnen hebben gebruikt die niet betrouwbaar waren.

In de rest van het verslag zijn weinig bronnen gebruikt. De bronnen die wel gebruikt werden waren wiskundig, waardoor ze erg betrouwbaar waren. De informatie in deze bronnen kan namelijk bewezen worden. Ook de hoofdstukken waarin geen of weinig bronnen werden gebruikt zijn betrouwbaar. We hebben namelijk alles bewezen, waardoor we zeker weten dat het klopt. Ook waren er veel subjectieve onderdelen, zoals welk type stelsel of grondtal we het best vonden. Hierbij hebben we onze keuze beargumenteerd.

Wanneer er een vervolgonderzoek gedaan wordt kan het handig zijn om ook voor andere toepassingen te onderzoeken welke getallenstelsels nuttig zijn. Wij hebben uitsluitend gekeken naar de werking van getallenstelsels in de pure wiskunde, maar niet naar de wiskunde die voor bijvoorbeeld computers gebruikt wordt. Wiskunde heeft enorm veel toepassingen, waarbij misschien andere stelsels handiger zijn, die wij niet hebben onderzocht.

Ook kan er nog enorm veel onderzoek gedaan worden naar de invloed van een twaalftallig stelsel op de wiskunde. Wij hebben dit enigszins kort beschreven, omdat er een limiet zit op de tijd die wij in dit verslag kunnen steken. Dit is natuurlijk een erg breed onderwerp, wat niet volledig in dit verslag beschreven is.

Een onconventionele keuze die wij in dit verslag hebben gemaakt is het gebruiken van twee compleet nieuwe cijfers. Er bestaan al twaalftallige stelsels waarin bijvoorbeeld een A & B (afgeleid van het hexadecimale stelsel) of T & E (eerste letters van tien en elf) worden gebruikt. Wij hebben ervoor gekozen om twee nieuwe cijfers te ontwerpen, die geen relatie hadden tot het alfabet of andere al herkenbare bronnen. We wilde namelijk dat deze cijfers, net als de cijfers 0 tot en met 9, niet verward werden voor letters, maar alleen herkend waren als cijfers. Letters worden vaak ook als variabelen gebruikt, wat voor verwarring zou kunnen zorgen. We hebben echter geen onconventionele keuzes gemaakt in de wijze van onderzoeken. Wel heeft het verslag een enigszins afwijkende opbouw. In hoofdstuk vier wordt al de conclusie op de hoofdvraag gegeven en hoofdstuk vijf is een vervolgonderzoek op de hoofdvraag. Normaal gesproken zou de informatie uit de eerste vier hoofdstukken gebruikt worden om in een aparte conclusie een antwoord op de hoofdvraag te geven. De vorm die wij hebben gebruikt vonden we beter bij dit onderzoek passen en daarom hebben we ervoor gekozen om dit op deze manier te doen.

Iets waar wij tijdens het schrijven van dit verslag vaak over nadachten, was het uiteindelijke nut van het onderzoek. We zijn namelijk tot de conclusie gekomen dat de wiskunde op dit moment niet ideaal werkt en we hebben nieuwe cijfers ingebracht om dit te veranderen. Waarschijnlijk blijft het onderzoek echter hierbij. Wij kunnen lastig de hele wiskunde veranderen, ook al zou dit wel voor een beter werkende wiskunde zorgen. Er zijn op dit moment al organisaties die voor een 12-tallig stelsel in de wiskunde pleiten, maar niet met veel succes. De invloed van dit verslag op de wiskunde zal niet groot zijn. Toch is het belangrijk dat er onderzoek naar gedaan wordt. We kunnen er namelijk niet vanuit gaan dat de wiskunde die gebruikt wordt goed werkt, alleen omdat deze door iedereen gebruikt wordt. Verandering is lastig, maar zou positieve gevolgen hebben. De organisaties die voor een 12-tallig stelsel pleiten hebben tot nu toe misschien nog weinig succes gehad, maar dat kan veranderen. Daarom moet er over gepraat en onderzoek naar gedaan worden.

Bijlagen

Berekeningen

H5 wortels

√2 = 1,4ㄣ79
1,4ㄣ79² = (14ㄣ79 · 14ㄣ79)/10⁸
14ㄣ79 · 14ㄣ79 berekenen

Tabel 53: Berekening

				1	4	ㄣ	7	9	
				1	4	ㄣ	7	9	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	x
	2	3	3	2	1	1			
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
							6	9	
						5	3	0	
					8	3	0	0	
				3	0	0	0	0	
				9	0	0	0	0	….
						5	3	0	
					4	1	0	0	
				6	5	0	0	0	
			2	4	0	0	0	0	
			7	0	0	0	0	0	….
					8	3	0	0	
				6	5	0	0	0	
			Ɔ	1	0	0	0	0	
		3	8	0	0	0	0	0	
		ㄣ	0	0	0	0	0	0	….
				3	0	0	0	0	

			2	4	0	0	0	0	
		3	8	0	0	0	0	0	
	1	4	0	0	0	0	0	0	
	4	0	0	0	0	0	0	0	
				9	0	0	0	0	
			7	0	0	0	0	0	
		ㄣ	0	0	0	0	0	0	
	4	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
1	ㄣ	ㄣ	ㄣ	ㄣ	7	6	0	9	

Dus 14ㄣ79 · 14ㄣ79 = 1ㄣㄣㄣㄣ7609
1,4ㄣ79 · 1,4ㄣ79 = 1ㄣㄣㄣㄣ7609/10^8 = 1,ㄣㄣㄣㄣ7609
Met significantie 5 dus 1,4ㄣ79^2 = 1,ㄣㄣㄣㄣ

√3 = 1,8950
$1{,}8950^2 = (18950 \cdot 18950)/10^8$
18950 · 18950 berekenen

Tabel 54: Berekening

				1	8	9	5	0	
				1	8	9	5	0	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	x
2	3	2	2	1					
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
					2	1	0	0	
				3	9	0	0	0	
			3	4	0	0	0	0	
			5	0	0	0	0	0	
				3	9	0	0	0	
			6	9	0	0	0	0	

		6	0	0	0	0	0	0	
		9	0	0	0	0	0	0	
			3	4	0	0	0	0	
		6	0	0	0	0	0	0	
	5	4	0	0	0	0	0	0	
	8	0	0	0	0	0	0	0	
			5	0	0	0	0	0	
		9	0	0	0	0	0	0	
	8	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
3	0	0	0	0	8	1	0	0	

Dus 18950 · 18950 = 300008100
$(18950 \cdot 18950)/10^8 = 3{,}00008100$
Met significantie 5 dus $1{,}8950^2 = 3{,}0000$

$\sqrt{6} = 2{,}5489$
$2{,}5489^2 = (25489 \cdot 25489)/10^8$
25489 · 25489 berekenen

Tabel 55: Berekening

				2	5	4	8	9	
				2	5	4	8	9	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	x
2	2	3	3	3	4				
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
							6	9	
						6	0	0	
					3	0	0	0	
				3	9	0	0	0	

			1	6	0	0	0	0	
						6	0	0	
					5	4	0	0	
				2	8	0	0	0	
			3	4	0	0	0	0	
		1	4	0	0	0	0	0	
					3	0	0	0	
				2	8	0	0	0	
			1	4	0	0	0	0	
		1	8	0	0	0	0	0	
		8	0	0	0	0	0	0	
				3	9	0	0	0	
			3	4	0	0	0	0	
		1	8	0	0	0	0	0	
	2	1	0	0	0	0	0	0	
	↋	0	0	0	0	0	0	0	
			1	6	0	0	0	0	
		1	4	0	0	0	0	0	
		8	0	0	0	0	0	0	
	↋	0	0	0	0	0	0	0	
4	0	0	0	0	0	0	0	0	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
6	0	0	0	1	5	1	6	9	

Dus 25489 · 25489 = 600015169
600015169/10^8 = 6,00015169
Met significantie 5 dus $2{,}5489^2$ = 6,0001

√7 = 2,78↊↋
$2{,}78↊↋^2$ = (278↊↋ · 278↊↋)/10^8
278↊↋ · 278↊↋ berekenen

Tabel 56: Berekening

					2	7	8	↊	↋	
					2	7	8	↊	↋	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x
		1	4	5	5	3	1			
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
								8	4	
							9	2	0	
						6	8	0	0	
					5	↋	0	0	0	
				1	8	0	0	0	0	
							9	2	0	
						↋	1	0	0	
					7	4	0	0	0	
				5	↋	0	0	0	0	
			1	↋	0	0	0	0	0	
						6	8	0	0	
					7	4	0	0	0	
				5	4	0	0	0	0	
			4	8	0	0	0	0	0	
		1	4	0	0	0	0	0	0	
					5	↋	0	0	0	
				6	5	0	0	0	0	
			4	8	0	0	0	0	0	
		4	1	0	0	0	0	0	0	
	1	2	0	0	0	0	0	0	0	
				1	8	0	0	0	0	
			1	↋	0	0	0	0	0	
		1	4	0	0	0	0	0	0	

	1	2	0	0	0	0	0	0	0	
	4	0	0	0	0	0	0	0	0	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
	6	ϟ	ϟ	ϟ	4	5	0	0	4	

Dus 278ϟƆ · 278ϟƆ = 6ϟϟϟ45004
(278ϟƆ · 278ϟƆ)/10^8 = 6,ϟϟϟ45004
Met significantie 5 dus 2,78ϟƆ^2 = 6,ϟϟϟ4

√8 = 2,9ϟ36
2,9ϟ36^2 = (29ϟ36 · 29ϟ36)/10^8
29ϟ36 · 29ϟ36 berekenen

Tabel 57: Berekening

				2	9	ϟ	3	6	
				2	9	ϟ	3	6	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	x
1	3	2	1	3	2	1			
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
							3	0	
						1	6	0	
					5	6	0	0	
				4	6	0	0	0	
			1	0	0	0	0	0	
						1	6	0	
						9	0	0	
				2	9	0	0	0	
			2	3	0	0	0	0	
			6	0	0	0	0	0	
					5	6	0	0	
				2	9	0	0	0	
			Ɔ	1	0	0	0	0	

		8	3	0	0	0	0	0	
	1	Ɔ	0	0	0	0	0	0	
				4	6	0	0	0	
			2	3	0	0	0	0	
		8	3	0	0	0	0	0	
	6	9	0	0	0	0	0	0	
1	6	0	0	0	0	0	0	0	
			1	0	0	0	0	0	
			6	0	0	0	0	0	
	1	Ɔ	0	0	0	0	0	0	
1	6	0	0	0	0	0	0	0	
4	0	0	0	0	0	0	0	0	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
7	↋	↋	↋	Ɔ	6	0	3	0	

Dus 29↋36 · 29↋36 = 7↋↋↋Ɔ6030
(29↋36 · 29↋36)/10^8 = 7,↋↋↋Ɔ6030
Met 5 significantie dus 2,9↋36^2 = 7,↋↋↋Ɔ

√Ɔ = 3,1↋45
3,1↋45^2 = (31↋45 · 31↋45)/10^8
31↋45 · 31↋45 berekenen

Tabel 58: Berekening

				3	1	↋	4	5	
				3	1	↋	4	5	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	x
1	2	3	2	3	1	1			
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
							2	1	
						1	8	0	
					4	7	0	0	

					5	0	0	0	
			1	3	0	0	0	0	
						1	8	0	
					1	4	0	0	
				3	8	0	0	0	
				5	0	0	0	0	
		1	0	0	0	0	0	0	
					4	7	0	0	
				3	8	0	0	0	
			Ɔ	1	0	0	0	0	
			↊	0	0	0	0	0	
	2	9	0	0	0	0	0	0	
					5	0	0	0	
				4	0	0	0	0	
			↊	0	0	0	0	0	
		1	0	0	0	0	0	0	
	3	0	0	0	0	0	0	0	
			1	3	0	0	0	0	
		1	0	0	0	0	0	0	
	2	9	0	0	0	0	0	0	
	3	0	0	0	0	0	0	0	
9	0	0	0	0	0	0	0	0	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
Ɔ	0	0	0	1	0	9	6	1	

Dus 31↊45 · 31↊45 = Ɔ00010961
(31↊45 · 31↊45)/10^8 = Ɔ,00010961
Met vijf significantie dus 3,1↊45^2 = Ɔ,0001

√↊ = 3,3973
$3{,}3973^2$ = (33973 · 33973)/10^8

33973 · 33973 berekenen

Tabel 59: Berekening

				3	3	9	7	3	
				3	3	9	7	3	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	x
2	2	3	4	2		1			
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
								9	
						1	9	0	
					2	3	0	0	
					9	0	0	0	
				9	0	0	0	0	
						1	9	0	
					4	1	0	0	
				5	3	0	0	0	
			1	9	0	0	0	0	
		1	9	0	0	0	0	0	
					2	3	0	0	
				5	3	0	0	0	
			6	9	0	0	0	0	
		2	3	0	0	0	0	0	
	2	3	0	0	0	0	0	0	
					3	0	0	0	
			1	9	0	0	0	0	
		2	3	0	0	0	0	0	
		9	0	0	0	0	0	0	
	9	0	0	0	0	0	0	0	
				3	0	0	0	0	
		1	9	0	0	0	0	0	

	2	3	0	0	0	0	0	0	
	9	0	0	0	0	0	0	0	
9	0	0	0	0	0	0	0	0	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
↊	0	0	0	0	2	Ɔ	6	9	

Dus 33973 · 33973 = ↊00002Ɔ69
(33973 · 33973)/10^8 = ↊,00002Ɔ69
Met vijf significantie dus 3,3973^2 = ↊,0000

√10 = 3,56Ɔ0
3,56$Ɔ0^2$ = (356Ɔ0 · 356Ɔ0)/10^8
356Ɔ0 · 356Ɔ0 berekenen

Tabel 60: Berekening

					3	5	6	Ɔ	0	
					3	5	6	Ɔ	0	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x
1	1	2	3	1						
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
						8	4	0	0	
					5	0	0	0	0	
				4	2	0	0	0	0	
			2	6	0	0	0	0	0	
					5	0	0	0	0	
				3	0	0	0	0	0	
			2	6	0	0	0	0	0	
		1	6	0	0	0	0	0	0	
				4	2	0	0	0	0	
			2	6	0	0	0	0	0	
		2	1	0	0	0	0	0	0	
	1	3	0	0	0	0	0	0	0	

			2	6	0	0	0	0	0	
		1	6	0	0	0	0	0	0	
	1	3	0	0	0	0	0	0	0	
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
1	0	0	0	0	2	8	4	0	0	

Dus 356Ↄ0 · 356Ↄ0 = 1000028400
(356Ↄ0 · 356Ↄ0)/10^8 = 10,00028400
Met vijf significantie dus 3,56Ↄ0^2 = 10,000

Nawoord

Evaluatie Mike

Van dit onderzoek heb ik ontzettend veel geleerd. Met andere verslagen kregen we vaak veel hulp van de bijhorende docent, terwijl we dit werkstuk echt met z'n tweeën hebben gemaakt. De samenwerking ging ontzettend goed. We hebben veel gebeld om dingen te bespreken en ook hebben we veel samengewerkt, omdat één van ons dan ergens niet uitkwam en de ander diegene dan kon helpen.

Het meest trots ben ik op het bewijs van het delen in een type P2 stelsel. Ik ben daar erg mee bezig geweest en het heeft erg lang geduurd voordat ik op een bewijs kwam. Wel is dit verslag erg lang. We hadden natuurlijk ook veel informatie te vertellen, maar we hebben nu een verslag gemaakt met de omvang van een heel boek. De volgende keer is het misschien handiger om een wat specifieker onderwerp te kiezen.

Evaluatie Brechtje

Ik heb veel plezier gehad bij het schrijven van dit verslag. Het onderwerp sloot namelijk goed aan op mijn interesses, waardoor ik het interessant vond om erover te leren en schijven. Ik heb dan ook veel geleerd, niet alleen over het onderwerp zelf, maar ook over het schrijven van een verslag. Zo moesten we bijvoorbeeld goed plannen en de taken verdelen zodat het schrijven van het verslag soepel verliep.

De samenwerking was erg goed. We hadden de taken duidelijk verdeeld zodat we beide altijd wel wat te doen hadden. Wanneer één van ons tegen een probleem aanliep losten we dit samen op zodat we niet vastliepen. Ook hebben we een aantal lastige onderdelen helemaal samen gedaan omdat we wisten dat dit het makkelijker zou maken.

Tijdens het schrijven van het verslag hebben we redelijk weinig feedback aan onze begeleider gevraagd. We wisten vaak wel wat we moesten doen, maar misschien hebben we wel elementen gemist die we hadden kunnen onderzoeken als we vaker om feedback hadden gevraagd.

Ook hebben we erg veel tijd in het eerste hoofdstuk gestoken en wat minder in het laatste hoofdstuk. Het eerste hoofdstuk was natuurlijk nuttig omdat we hierdoor wat meer achtergrond kennis hadden over het onderwerp, maar het zou ook handig zijn geweest als we meer tijd in het laatste hoofdstuk hadden kunnen steken zodat we hier dieper op in konden gaan.

Logboek

Taakverdeling

Activiteit	Mike	Brechtje
Wiskunde regels - Literatuur verzamelen en doornemen - Opstellen axioma’s en toelichten - Bewijzen operatoren - Wiskundige symbolen - Algemene inzichten	 x x x x	
Hoofdstuk 1 - Literatuur verzamelen en doornemen - Overzicht; kardinale & ordinale nummers, positioneel en additieve stelsels - Prehistorie (turven) - Verschillende getallenstelsels toelichten - Overzicht - Hedendaagse getallenstelsels		 x x x x x x
Hoofdstuk 2 - Soorten getallenstelsels - Opstellen rekenregels stelsel type P2 - Rekenregels additief stelsel - Introductie	 x x	 x x x
Hoofdstuk 3 - Berekeningen - Notatie - Grondtal	 x x x	 x x
Hoofdstuk 4 - Type getallenstelsel vinden - Grondtal vinden	 x x	 x x
Hoofdstuk 5 - Nieuwe getallen introduceren	 x	 x
Hoofdstuk 6 - operatoren - pi - e	 x x	 x x
Verslag afwerken	x	x

Planning

Week	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	1	2	3	4	5	6
Startfase																								
Verschillende onderwerpen zoeken																								
Afgebakend onderwerp uitkiezen																								
Hoofdvraag bepalen																								
Deelvragen bepalen																								
Goedkeuring krijgen van de begeleider																								
Plan van Aanpak opstellen																								
Onderzoeks- en schrijffase																								
Basis van de wiskunde																								
Hoofdstuk 1																								
Hoofdstuk 2																								
Hoofdstuk 3																								
Hoofdstuk 4																								
Hoofdstuk 5 (geschrapt, H6 is nu H5)																								
Hoofdstuk 6																								
Logboek																								
Bronnenboek																								
Eindfase																								
Samenvatting en inleiding																								
Bijlage afmaken																								
Laatste dingen zoals evaluatie en voorwoord																								
Spellingscontrole																								
volledige controle pws																								

Tijdverantwoording

Wie	Datum	Tijdsduur	Activiteit	Bijzonderheden
Mike	11-09-2021	120 minuten	Opmaak maken, Logboek starten	Maandag bespreken met begeleider over deelvragen
Brechtje	11-09-2021	120 minuten	Opmaak maken, Logboek starten	Bellen
Mike	13-09-2021	90 minuten	Voorbladen en overleg plan van aanpak en verdiept in babylonische getallen	Bellen
Brechtje	13-09-2021	170 minuten	Overleg plan van aanpak, begin onderzoek deelvraag 1, introductie H1	Bellen
Brechtje	18-09-2021	150 minuten	Babyloniërs H1	
Mike	27-09-2021	120 minuten	Onderzoek binaire getallen H2	
Mike	02-10-2021	190 minuten	Getallenstelsels uitwerken H2	
Brechtje	02-10-2021	30 minuten	Babyloniërs H1	
Mike	05-10-2021	60 minuten	Algemene vorm optellen in elk getallenstelsel H2	
Mike	06-10-2021	130 minuten	Algemene vorm optellen in elk getallenstelsel H2	
Brechtje	06-10-2021	180 minuten	Begonnen onderzoek spijkerschrift voor H2	
Brechtje	07-10-2021	120 minuten	Algemene vorm optellen en aftrekken in elk getallenstelsel H2	Bellen
Mike	07-10-2021	260 minuten	Bewijs algemene vorm optellen en vermenigvuldigen en algemene vorm vermenigvuldigen H2	Bellen
Mike	08-10-2021	140 minuten	bewijs algemene vorm aftrekken van getallen en algemene vorm delen H2	Bellen
Brechtje	08-10-2021	260 minuten	bewijs algemene vorm aftrekken van getallen en	Bellen

			algemene vorm delen, methode optellen en bewijs optellen in document zetten H2	
Mike	09-10-2021	180 minuten	Document optellen uitbreiden met oa een voorbeeld H2	Bellen
Brechtje	09-10-2021	130 minuten	Aftrekken in document zetten inclusief voorbeeld, transcriptie beschrijven H2	Bellen
Mike	10-10-2021	130 minuten	Aftrekken en vermenigvuldigen in document H2	Bellen
Brechtje	11-10-2021	100 minuten	Transcriptie optellen en aftrekken, delen H2	Bellen
Mike	11-10-2021	90 minuten	Bewijs zoeken voor delen H2	
Mike	12-10-2021	90 minuten	Bewijs zoeken voor delen H2	
Mike	14-10-2021	140 minuten	bewijs zoeken voor delen H2	
Brechtje	14-10-2021	110 minuten	Literatuuronderzoek H2 en methode delen opschrijven H2	
Mike	15-10-2021	300 minuten	Bewijs gevonden voor delen H2	
Brechtje	15-10-2021	140 minuten	Bewijs delen H2	
Brechtje	20-10-2021	60 minuten	Delen in document zetten H2	
Brechtje	21-10-2021	50 minuten	Literatuuronderzoek H1 en beginnen Egyptenaren H1	
Mike	08-11-2021	180 minuten	Gesprek met begeleider, delen in document zetten H2	PWS dag
Brechtje	08-11-2021	180 minuten	Gesprek met begeleider, delen in document zetten H2	PWS dag
Brechtje	12-11-2021	20 minuten	Beoordelingsboekje invullen	
Brechtje	17-11-2021	180 minuten	Egyptenaren H1	
Mike	18-11-2021	60 minuten	Delen in document H2	
Brechtje	19-11-2021	260 minuten	Literatuuronderzoek en introductie H1	
Mike	20-11-2021	140 minuten	Voorblad en vermenigvuldigen H2	

Brechtje	21-11-2021	120 minuten	Literatuuronderzoek, Egyptische cijfers en oude Grieken H1	
Mike	22-11-2021	180 minuten	Wiskunderegels H1	
Brechtje	23-11-2021	170 minuten	Oude Grieken H1	
Mike	23-11-2021	120 minuten	Wiskunderegels H1	
Mike	24-11-2021	240 minuten	Wiskunderegels H1	
Brechtje	24-11-2021	120 minuten	Voortgangspresentatie voorbereiden	
Brechtje	25-11-2021	180 minuten	Romeinse stelsel H1	
Mike	26-11-2021	40 minuten	Wiskunderegels H1	
Brechtje	26-11-2021	240 minuten	Maya’s en bijwerken Babyloniërs H1	
Mike	27-11-2021	215 minuten	Basis van wiskunde afmaken H1	
Brechtje	29-11-2021	100 minuten	Chinezen en Overzicht H1	
Brechtje	30-11-2021	160 minuten	Oorsprong huidig decimaal stelsel H1	
Mike	30-11-2021	40 minuten	Presentatie	2 dec voortgangspresentatie + Bellen
Brechtje	01-12-2021	140 minuten	Hedendaags gebruikte getallenstelsels H1	
Brechtje	04-12-2021	260 minuten	Soorten getallenstelsels H2	
Mike	06-12-2021	140 minuten	Vermenigvuldigen bewijs en werkwijze H2	Tijd niks gedaan door ziekte
Brechtje	06-12-2021	160 minuten	Soorten getallenstelsel H2, Chinezen H1 verbeteren, opmaak verbeteren	Bellen
Mike	07-12-2021	360 minuten	Vermenigvuldigen H2 afgemaakt	
Brechtje	08-12-2021	280 minuten	Huidig decimaal stelsel H1, Introductie H2, bijwerken type P2 stelsel H2, Rekenregels additief stelsel H2	

Mike	09-12-2021	480 minuten	Bewijzen en corrigeren van type A1 stelsel en volledig bewijs noteren eerste gedeelte delen H2	Samen planning gemaakt voor de andere hoofdstukken
Brechtje	09-12-2021	180 minuten	Bewijzen en corrigeren van type A1 stelsel H2	
Brechtje	10-12-2021	80 minuten	Voorbeelden type A1 stelsel rekenregels H3	
Mike	11-12-2021	120 minuten	Bewijs delen afmaken H2	
Brechtje	11-12-2021	180 minuten	Voorbeelden type A1 en P2 stelsel rekenregels H3	
Mike	12-12-2021	90 minuten	Problemen getallenstelsels H3	
Brechtje	15-12-2021	90 minuten	Problemen notatie H3	
Brechtje	16-12-2021	240 minuten	Problemen notatie H3	
Mike	16-12-2021	120 minuten	Delen afmaken H2	
Mike	17-12-2021	240 minuten	H2 opmaak helemaal afmaken en grondtallen H3	Bellen
Brechtje	17-12-2021	180 minuten	H2 opmaak, notatie H3	Bellen
Mike	18-12-2021	210 minuten	H3 grondtallen uitrekenen	Bellen
Brechtje	18-12-2021	140 minuten	Notatie H3 en notatie H4	Bellen
Mike	19-12-2021	300 minuten	H2 breuken bewijzen en werkwijze en H3 grondtallen	
Mike	20-12-2021	90 minuten	Voorbeeld breuken H2 en H3 afmaken	Bellen
Brechtje	20-12-2021	80 minuten	Breuken H2 en H3	Bellen
Mike	21-12-2021	30 minuten	H3 nakijken en doc overzicht	
Mike	22-12-2021	290 minuten	H4	Bellen
Brechtje	22-12-2021	340 minuten	H4	Bellen
Mike	23-12-2021	240 minuten	Namen voor getallenstelsel en H4 afmaken, voorbladen en begin H5	Bellen
Brechtje	23-12-2021	120 minuten	Namen voor getallenstelsel en H4 afmaken	Bellen
Mike	11-01-2021	80 minuten	Het getal e H5	

Mike	01-02-2022	90 minuten	Tabellen H5	Bellen
Brechtje	01-02-2022	240 minuten	Tabellen H5, pi H5	
Brechtje	02-02-2022	280 minuten	Tabellen en wortels H5	
Mike	02-02-2022	210 minuten	Het getal e en delen H5	
Mike	03-02-2022	200 minuten	Rijen H5 en samenvatting	
Brechtje	03-02-2022	300 minuten	Wortels H5	
Brechtje	06-02-2022	300 minuten	Samenvatting, inleiding, nawoord, voorwoord, discussie, alle opmaak	Bellen, plan om 11-02 -2022 volledige eerste versie in te leveren
Mike	06-02-2022	300 minuten	Samenvatting, inleiding nawoord, voorwoord, deelbaarheid H5, gulden snede H5	Bellen, plan om 11-02 -2022 volledige eerste versie in te leveren
Brechtje	07-02-2022	240 minuten	Verslag doorlezen en verbeteren	
Mike	08-02-2022	400 minuten	Rijen en breuken H5 en verslag verbeteren	
Brechtje	08-02-2022	240 minuten	Verslagen verbeteren en presentatie voorbereiden	
Mike	09-02-2022	240 minuten	Pi H5 en laatste check	Inhoud van verslag af
Brechtje	09-02-2022	60 minuten	Pi H5	Bellen
Brechtje	10-02-2022	300 minuten	Presentatie voorbereiden, presenteren, pi H5, omschrijfmethode grondtal getallenstelsel H2	Verslag morgen online inleveren
Mike	10-02-2022	300 minuten	Presentatie voorbereiden, presenteren, pi H5, omschrijfmethode grondtal getallenstelsel H2	Bellen
Totaal Mike:	130 uur			
Totaal Brechtje:	130 uur			

Bronnenlijst

[0.1] Wikipedia-bijdragers. (2021, oktober 6). *Lijst van wiskundige symbolen*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_wiskundige_symbolen

[0.2] Wikipedia-bijdragers. (2021, januari 3). *Punt (wiskunde)*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Punt_(wiskunde)

[0.3] Wikipedia-bijdragers. (2021, september 11). *Lijn (meetkunde)*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijn_(meetkunde)

[0.4] *Rechte, halfrechte, lijnstuk*. (z.d.). Digitale gereedschapskist vlakke meetkunde. Geraadpleegd op 6 december 2021, van http://digitalegereedschapskistceuppens.weebly.com/rechte-halfrechte-lijnstuk.html

[0.5] Wikipedia-bijdragers. (2020, 23 december). *Vlak (meetkunde)*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Vlak_(meetkunde)

[0.6] Wikipedia-bijdragers. (2019, 5 november). *Lijnstuk*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijnstuk

[0.7] Wikipedia-bijdragers. (2021, 17 oktober). *Afstand*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Afstand

[0.8] Wikipedia-bijdragers. (2020, 21 juni). *Cirkel*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Cirkel

[0.9] Wikipedia-bijdragers. (2021, oktober 31). *Bol (lichaam)*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Bol_(lichaam)

[0.10] Wikipedia-bijdragers. (2020, februari 26). *Middelpunt (meetkunde)*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Middelpunt_(meetkunde)

[0.11] Wikipedia-bijdragers. (2021, januari 14). *Straal (wiskunde)*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Straal_(wiskunde)

[0.12] Wikipedia-bijdragers. (2021, oktober 17). *Hoek (meetkunde)*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Hoek_(meetkunde)

[0.13] Wikipedia-bijdragers. (2021, augustus 19). *Snijden en kruisen*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Snijden_en_kruisen

[0.14] Wikipedia-bijdragers. (2021, augustus 27). *Axioma*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Axioma

[0.15] Wikipedia-bijdragers. (2019, november 6). *Postulaten van Euclides*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Postulaten_van_Euclides

[0.16] Wikipedia-bijdragers. (2021, juni 17). *Axioma's van Peano*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Axioma%27s_van_Peano#Ordening

[0.17] Wikipedia-bijdragers. (2021, november 17). *Neutraal element*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Neutraal_element

[0.18] Wikipedia-bijdragers. (2021, april 24). *Commutativiteit*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Commutativiteit

[0.19] Wikipedia-bijdragers. (2018, 6 november). *Associativiteit (wiskunde)*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Associativiteit_(wiskunde)

[0.20] Wikipedia-bijdragers. (2019, december 9). *Distributiviteit*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Distributiviteit

[0.21] Van den Berg, R. C. (2016). *Selecties uit de Elementen van Euclides, Boek 1 (Woorden tussen haakjes en voetnoten zijn door de vertaler J.P.H. toegevoegd en ook enkele Griekse worden die in het hedendaagse Engels voortleven.) 1.* docplayer. Geraadpleegd op 6 december 2021, van https://docplayer.nl/14682147-Selecties-uit-de-elementen-van-euclides-boek-1.html

[1.1] Y. (2019, 5 augustus). *The Lebombo Bone: The Oldest Mathematical Artifact in the World*. Geraadpleegd op 13 september 2021, van https://afrolegends.com/2019/05/17/the-lebombo-bone-the-oldest-mathematical-artifact-in-the-world/

[1.2] Suzel, A. (2020, 17 december). *The Invention of Numbers | Feed Magazine*. Geraadpleegd op 13 september 2021, van https://feed.jeronimomartins.com/figure/the-invention-of-numbers/

[1.3] W. Williams, S. (z.d.). *An old Mathematical Object*. Geraadpleegd op 13 september 2021, van http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/ishango.html

[1.4] *Who Invented Numbers?* (2020, 11 maart). Wonderopolis. https://wonderopolis.org/wonder/who-invented-numbers

[1.5] Deseret News. (2012, 5 augustus). *A brief history of numbers and counting, Part 1: Mathematics advanced with civilization*. https://www.deseret.com/2012/8/5/20505112/a-brief-history-of-numbers-and-counting-part-1-mathematics-advanced-with-civilization

[1.6] De Sommenfabriek C.V. (2019, 21 februari). *positiestelsel - Wiskunde met video's en oefeningen*. Wiskunde met video's en oefeningen. https://www.wiskundemetvideosenoefeningen.nl/positiestelsel/

[1.7] Lagerburg, R. (z.d.). *Bekijk: Tien vingers of een goed deelbaar getal?* NEMOKennislink. Geraadpleegd op 18 september 2021, van https://www.nemokennislink.nl/publicaties/tien-vingers-of-een-goed-deelbaar-getal/

[1.8] *Sumerian/Babylonian Mathematics*. (2020, 24 februari). The Story of Mathematics - A History of Mathematical Thought from Ancient Times to the Modern Day. https://www.storyofmathematics.com/sumerian.html

[1.9] Geschiedenis van het spijkerschrift. (z.d.). InfoNu. Geraadpleegd op 18 september 2021, van https://kunst-en-cultuur.infonu.nl/geschiedenis/52095-geschiedenis-van-het-spijkerschrift.html

[1.10] Van der Roest, A., & Kindt, M. (2005). *Zebra-reeks 20 - Babylonische Wiskunde* (1ste ed.). Epsilon Uitgaven.

[1.11] Wikipedia contributors. (2021, 8 september). *Egyptian numerals*. Wikipedia. Geraadpleegd op 17 november 2021, van https://en.wikipedia.org/wiki/Egyptian_numerals

[1.12] Wikipedia contributors. (2021, 5 november). *Egyptian fraction*. Wikipedia. Geraadpleegd op 17 november 2021, van https://en.wikipedia.org/wiki/Egyptian_fraction

[1.13] Dr R Knott: ronknott (AT) mac (DOT) com. (z.d.). *Egyptian Fractions*. maths.surrey. Geraadpleegd op 17 november 2021, van http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fractions/egyptian.html#section1

[1.14] Cooke, R. L. (2011). *The history of mathematics: A brief course* (2de ed.). John Wiley & Sons. https://doi.org/10.1002/9781118033098

[1.15] Ifrah, G. (2005). The Universal History Of Numbers 1: The World's First Number-Systems. Adfo Books.

[1.16] Williams, S. W. (2008). *ON THE EGYPTIAN ZERO - Mathematicians of the African Diaspor*. math.buffalo.edu. Geraadpleegd op 22 november 2021, van http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad_ancient_egypt_zero.html

[1.17] O'Connor, J. J. (2000, december). *Egyptian Papyri*. Maths History. Geraadpleegd op 22 november 2021, van https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Egyptian_papyri/

[1.18] Wikipedia contributors. (2021, september 20). *Etruscan numerals*. Wikipedia. Geraadpleegd op 26 november 2021, van https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Etruscan_numerals&oldid=1045467596

[1.19] Wikipedia contributors. (2021, november 23). *Roman numerals*. Wikipedia. Geraadpleegd op 26 november 2021, van https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Roman_numerals&oldid=1056738903

[1.20] Lewis, P. (2005). *Roman numerals - history and use*. clarahost. Geraadpleegd op 25 november 2021, van http://www.web40571.clarahost.co.uk/roman/howtheywork.htm

[1.21] *History of Zero and the representing the absence of value*. (z.d.). mathwarehouse. Geraadpleegd op 26 november 2021, van https://www.mathwarehouse.com/history/history-of-zero.php

[1.22] *Babylonian mathematics*. (z.d.). OpenLearn. Geraadpleegd op 26 november 2021, van https://www.open.edu/openlearn/science-maths-technology/mathematics-and-statistics/mathematics/babylonian-mathematics/content-section-1.3

[1.23] Wikipedia contributors. (2021, november 4). *Greek mathematics*. Wikipedia. Geraadpleegd op 26 november 2021, van https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Greek_mathematics&oldid=1053445722

[1.24] Yolkowski, J. (2014, 15 september). Greek Ionic Numerals (Math Lair). mathlair. Geraadpleegd op 26 november 2021, van https://mathlair.allfunandgames.ca/ionic.php

[1.25] T. (2019, 17 augustus). *Zero in Greek mathematics*. Scientific Gems. Geraadpleegd op 26 november 2021, van https://scientificgems.wordpress.com/2019/08/17/zero-in-greek-mathematics/

[1.26] Wikipedia contributors. (2021, 24 november). *Greek numerals*. Wikipedia. Geraadpleegd op 26 november 2021, van https://en.wikipedia.org/wiki/Greek_numerals

[1.27] Wikipedia-bijdragers. (2021, 24 maart). *Mayakalender*. Wikipedia. Geraadpleegd op 26 november 2021, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Mayakalender

[1.28] Wikipedia contributors. (2021, april 26). *Brāhmasphuṭasiddhānta*. Wikipedia. Geraadpleegd op 30 november 2021, van https://en.wikipedia.org/wiki/Br%C4%81hmasphu%E1%B9%ADasiddh%C4%81nta

[1.29] Wikipedia contributors. (2021, november 10). *Hindu–Arabic numeral system*. Wikipedia. Geraadpleegd op 30 november 2021, van https://en.wikipedia.org/wiki/Hindu%E2%80%93Arabic_numeral_system

[1.30] *Arabische cijfers*. (z.d.). Stringfixer. Geraadpleegd op 30 november 2021, van https://stringfixer.com/nl/Hindu-Arabic_numerals

[1.31] Computer Hope. (2021, 2 mei). *What is BIT (Binary DigIT)?* Includehelp. Geraadpleegd op 1 december 2021, van https://www.computerhope.com/jargon/b/bit.htm

[1.32] Wikipedia contributors. (2021, november 22). *Binary number*. Wikipedia. Geraadpleegd op 1 december 2021, van https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_number#Bitwise_operations

[1.33] Brain, M. (2020, 27 juli). *How Boolean Logic Works*. HowStuffWorks. Geraadpleegd op 1 december 2021, van https://computer.howstuffworks.com/boolean.htm

[1.34] *The Binary Number System: Its history, applications and advantages | Binary Convertor*. (z.d.). binarytranslator. Geraadpleegd op 1 december 2021, van https://www.binarytranslator.com/the-binary-number-system-its-history-applications-and-advantages

[1.35] Wikipedia contributors. (2021, december 1). *Hexadecimal*. Wikipedia. Geraadpleegd op 1 december 2021, van https://en.wikipedia.org/wiki/Hexadecimal#Other_symbols_for_10%E2%80%9315

[1.36] Wikipedia contributors. (2021, 6 december). *Decimal*. Wikipedia. Geraadpleegd op 8 december 2021, van https://en.wikipedia.org/wiki/Decimal

[1.37] Carpi, A., PhD. (2017, 12 februari). *The Metric System*. Visionlearning. Geraadpleegd op 8 december 2021, van https://www.visionlearning.com/en/library/General-Science/3/The-Metric-System/47

[1.38] Wikipedia contributors. (2021, november 29). *Fraction*. Wikipedia. Geraadpleegd op 8 december 2021, van https://en.wikipedia.org/wiki/Fraction#Decimal_fractions_and_percentages

[2.1] O'Connor, J. J. (2000, december). *Egyptian Papyri*. Maths History. Geraadpleegd op 22 november 2021, van https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Egyptian_papyri/

[2.2] Wikipedia contributors. (2022, 27 januari). *Fraction*. Wikipedia. Geraadpleegd op 7 februari 2022, van https://en.wikipedia.org/wiki/Fraction#Decimal_fractions_and_percentages

[2.3] Wikipedia contributors. (2022, januari 30). *Negative base*. Wikipedia. Geraadpleegd op 7 februari 2022, van https://en.wikipedia.org/wiki/Negative_base

[2.4] Wikipedia contributors. (2021, 8 mei). *Quater-imaginary base*. Wikipedia. Geraadpleegd op 7 februari 2022, van https://en.wikipedia.org/wiki/Quater-imaginary_base

[2.5] Wikipedia contributors. (2022, februari 1). *Balanced ternary*. Wikipedia. Geraadpleegd op 7 februari 2022, van https://en.wikipedia.org/wiki/Balanced_ternary

[2.6] Azzolino, A. (2010). *Ancient Egyptian Multiplication, Division, Root Extraction*. mathnstuff. Geraadpleegd op 10 februari 2022, van http://www.mathnstuff.com/math/spoken/here/2class/60/egyptm.htm

[2.7] Wikipedia contributors. (2022, februari 10). *Positional notation*. Wikipedia. Geraadpleegd op 10 februari 2022, van https://en.wikipedia.org/wiki/Positional_notation

[5.1] Wikipedia-bijdragers. (2021, 3 september). *E (wiskunde)*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 februari 2022, van https://nl.wikipedia.org/wiki/E_(wiskunde)

[5.2] Wikipedia-bijdragers. (2021, december 7). *Taylorreeks*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 februari 2022, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Taylorreeks

[5.3] Wikipedia-bijdragers. (2021, september 7). *Differentievergelijking*. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 februari 2022, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Differentievergelijking#Rij_van_Fibonacci

[5.4] Wikipedia contributors. (2021, december 15). *Basel problem*. Wikipedia. Geraadpleegd op 8 februari 2022, van https://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem

[5.5] Wikipedia-bijdragers. (2022, 26 januari). *Polynoom*. Wikipedia. Geraadpleegd op 8 februari 2022, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Polynoom

[5.6] Wikipedia-bijdragers. (2019, 20 juli). *Hoofdstelling van de algebra*. Wikipedia. Geraadpleegd op 8 februari 2022, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Hoofdstelling_van_de_algebra